

مقدمة قصيرة جدا

تيموثي جاورز

الرياضيات

ترجمة انتصارات محمد حسن الشبكي

الرياضيات

مقدمة قصيرة جدًّا

تأليف
تيموثي جاورز

ترجمة
انتصارات محمد حسن الشبكي

مراجعة
محمد عبد العظيم سعود
هبة عبد المولى أحمد



Mathematics

Timothy Gowers

الرياضيات

تيموثي جاورز

الناشر مؤسسة هنداوي
المشهرة برقم ١٠٥٨٥٩٧٠ بتاريخ ٢٦ / ١ / ٢٠١٧

يورك هاوس، شييت ستريت، وندسور، SL4 1DD، المملكة المتحدة
تليفون: ٨٣٢٥٢٢ ١٧٥٣ (٠) ٤٤ +
البريد الإلكتروني: hindawi@hindawi.org
الموقع الإلكتروني: https://www.hindawi.org

تصميم الغلاف: يوسف غازي

الترقيم الدولي: ٩٧٨ ١ ٥٢٧٣ ٠٠٠٦ ٤

صدر الكتاب الأصلي باللغة الإنجليزية عام ٢٠٠٢.
صدرت هذه الترجمة عن مؤسسة هنداوي عام ٢٠٠٩.

المحتويات

مقدمة

في بداية القرن العشرين، لاحظ عالِمُ الرياضيات العظيم ديفيد هيلبرت أن عددًا من البراهين الرياضية المهمَّة مُتشابهُ التركيب. وفي الواقع، أدرك هيلبرت أنه عند مستوًى مناسبٍ من التعميم يمكن اعتبارُها هي نفسها. نتجَ عن هذه الملاحظة — وغيرِها من مُلاحظاتٍ مُشابهة — فرعٌ جديد في الرياضيات، سُمِّيَ أحدُ مفاهيمه الرئيسية باسم هيلبرت. إن المفهوم الرياضيَّ لفراغ هيلبرت يُلقي الضوء على جوانبَ كثيرة من الرياضيات الحديثة؛ بدءًا من نظرية الأعداد وحتى ميكانيكا الكَمِّ، حتى إنك إذا كنتَ لا تعرف على الأقل مبادئَ نظرية فراغ هيلبرت، فلا يُمكنك أن تدَّعيَ أنك عالِم رياضياتٍ ضليع.

إذن ما فراغ هيلبرت؟ في المقرَّر النموذجي للرياضيات الجامعية يُعَرَّف فراغ هيلبرت بأنه فراغُ حاصلِ ضربٍ داخلي تام. ويُتوقَّع من الطلاب الذين يَدرُسون هذا المقرر أن يعرفوا من مقرَّراتٍ سابقة أن فراغَ حاصلِ الضرب الداخلي هو فراغُ متَّجهاتٍ مكتوبٌ بصيغةِ حاصلِ ضرب داخلي، وأن الفراغ يكون تامًّا إذا كانت كلُّ مُتتابعةٍ لكوشي في الفراغ تقارُبية. وبالطبع حتى تكونَ هذه التعريفات ذاتَ معنًى، فإن الطلاب بحاجةٍ أيضًا إلى أن يعرفوا ما يَعنيه فراغُ المتَّجهات وحاصلُ الضرب الداخلي، ومُتتابعةُ كوشي، والتقارُب. ولإعطاء مثالٍ واحد منها (ليس أطوَلَها): متتابعة كوشي هي متتابعة $x_1, x_2, x_3, \ldots$ حيث يُوجَد لكلِّ عددٍ موجب ϵ عددٌ صحيح N؛ بحيث إنه لأيِّ عددَين صحيحَين p وq أكبرُ من N تكون المسافةُ من x_p إلى x_q هي ϵ على الأكثر.

باختصار، لكي تأمُلَ في فَهم المقصود بفراغ هيلبرت؛ ينبغي لك أن تتعلمَ وتستوعب تسلسُلًا كاملًا من المفاهيم الأدنى مُستوًى أولًا. ولا عجَب في أن الأمر يستغرقُ وقتًا ومجهودًا. ولأن الأمر نفسَه ينطبق على عددٍ كبير من أهم الأفكار الرياضية، فإنه تُوجَد حدودٌ صارمة لما

نستطيع إنجازَه من خلال أي كتابٍ يحاول تقديمَ مقدمة سهلة ومُستساغة إلى الرياضيات، لا سيَّما إذا كانت المقدمةُ قصيرةً جدًّا.

وبدلًا من محاولة إيجاد طرقٍ ماهرة للتحايُل على هذه الصعوبة؛ فقد ركَّزتُ على عائقٍ آخرَ أمام إيصالِ المفاهيم الرياضية. هذه الصعوبة فلسفيةٌ أكثرُ منها تِقنية، وهي تُفرِّق بين مَنْ هم راضون بمفهومٍ مثل اللانهاية والجَذْر التربيعي لسالب واحد والبُعد السادس والعشرين والفراغ المنحني، ومَنْ يَجدونها مفاهيمَ مُتناقضةً على نحوٍ مُشوَّش. ومن الممكن أن يَقنَع المرءُ بهذه الأفكار، دون التعمُّق في التفاصيل التقنية، وهذا ما سأُحاول توضيحَ كيفيته.

وإذا جاز القولُ إن لهذا الكتاب رسالةً، فرسالتُه هي ضرورةُ أن يتعلم المرءُ التفكيرَ المجرد؛ لأن كثيرًا من الصِّعاب سوف تختفي ببساطةٍ عند فِعل ذلك. وسوف أشرح بالتفصيل ما الذي أَعنيه بالطريقة المجردة في الفصل الثاني. يهتمُّ الفصل الأول بأنواعٍ أكثرَ أُلفةً وترابطًا من التجريد: عملية استخلاص السِّمات الأساسية من المسائل المُستقاة من الواقع، ومن ثَم تحويلها إلى مسائلَ رياضية. في هذَين الفصلَين والفصلِ الثالث أُناقش المقصودَ بالبرهان الدقيق في الرياضيَّات عمومًا.

سأُناقش بعد ذلك موضوعاتٍ أكثرَ تحديدًا. أما الفصل الأخير، فهو يُعْنى بعلماء الرياضيات أكثرَ من الرياضياتِ نفسِها، ومن ثَم فطابَعُه مختلفٌ إلى حدٍّ ما عن الفصول الأخرى. أُوصي بقراءة الفصل الثاني قبل قراءة أيِّ فصلٍ من الفصول اللاحِقة، ولكن بصرف النظر عن ذلك فإن الكتاب قد نُظِّم بطريقةٍ غير مُتدرِّجة كلما أمكنَ ذلك، ولا أفترض، بالاقتراب من نهاية الكتاب، أن يستوعبَ القارئُ ويتذكَّر كلَّ ما وردَ ذِكره سابقًا.

يلزم لقراءة هذا الكتاب الإلمامُ بقدرٍ ضئيل من المعلومات المستقاة من مراحلَ تعليميةٍ سابقة (يمكن الاكتفاءُ بالثانوية أو ما يُكافئها)، ولن أُحاول جذْبَ انتباهِ القارئ؛ لأنني سأفترض ضمنًا أنه مُهتم.

ولهذا السبب؛ لم أتطرَّق في الكتاب إلى سردِ حكاياتٍ مُسلِّية أو الاستعانة برسومٍ كاريكاتورية أو جُملٍ إنشائية، أو الإتيانِ بعناوينَ هزلية للفصول، أو استخدامِ صورٍ من مجموعات ماندلبرو. وتجنَّبتُ أيضًا موضوعاتٍ مثلَ نظرية الفوضى ونظريةِ جودل، اللتَين تستحوذان على خيال العامَّة بما لا يتناسبُ مع تأثيرهما الضئيل على الأبحاث الرياضية الحاليَّة. على أي حالٍ فقد عُولِجَت هذه الموضوعاتُ جيدًا في كتبٍ أُخرى كثيرة. وبدلًا

من ذلك، تناولتُ عددًا من الموضوعات البسيطة، وناقشتُها بالتفصيل؛ لتوضيح كيف يمكن فهمُها بطريقةٍ أدَق. وبعبارةٍ أخرى، قصدتُ إلى التعمُّق بدلًا من العرض بسطحية، وحاولتُ جاهدًا أن أنقل جاذبيةَ الرياضيات السائدة بِجَعْلِها تتكلم عن نفسها.

أودُّ أن أشكر لمعهد كلاي للرياضيات وجامعة برنستون دعْمَهما وضيافتَهما لي أثناء مرحلةٍ من تأليف الكتاب. وإنني لَممتنٌّ جدًّا لجلبرت أدير، وربيكا جاورز، وإميلي جاورز، وباتريك جاورز، وجوشوا كاتز، وإدموند توماس؛ لقراءتهم المسوَّداتِ الأولى. ومع أنهم على قدرٍ كبير من الذكاء وسَعة الاطلاع لا يجعلهم في مصاف عموم القراء؛ فقد أكَّد لي ذلك على الأقل أن ما كتبتُه مفهومٌ لغير الرياضيِّين. وقد أثمرَت تعليقاتُهم كثيرًا من التحسينات. وإنني لأُهدي هذا الكتابَ إلى إميلي؛ على أملِ أن يُعطيها فكرةً بسيطة عما أفعله طَوال اليوم.

الفصل الأول

النماذج

(١) كيف ترمي حجرًا؟

افترِضْ أنك واقفٌ على أرض مستوية في يوم هادئ، وتُمسك في يدِك حجرًا، وتودُّ أن ترميَه إلى أبعدِ مسافةٍ ممكنة. إذا سلَّمنا جَدلًا بأنك ستُلقيه بقوة، فإن القرار الأهم الذي يجب اتخاذُه هو تعيين الزاوية التي يترك بها الحجر يدَك. إذا كانت هذه الزاويةُ مسطَّحةً للغاية، فإن الحجر سيسقط سريعًا على الأرض مع أنَّ له سرعةً أُفقية كبيرة، ومن ثمَّ فلن تكون لدَيه فرصةٌ للوصول إلى مسافةٍ بعيدة جدًّا. وعلى الجانب الآخر، فإنك إذا رميتَ الحجر لمسافةٍ عالية جدًّا فإنه يظلُّ مدةً أطولَ في الهواء، ولكن لن يُغطِّيَ مسافةً كبيرة على الأرض في هذه الحالة. من الواضح أننا نحتاج إلى حلٍّ وسط.

يتَّضح أن أفضل حلٍّ وسط يمكن أن نأمُلَه في ظل هذه الظروف هو ما يتأتَّى عن استخدام مزيجٍ من الفيزياء النيوتنية وبعضِ مبادئ التفاضُل والتكامل؛ يجب أن يكون الحجرُ عند مُغادرتِه يدَك متجِهًا إلى أعلى بزاويةٍ قياسُها 45 درجةً على الخط الأُفُقي. توضِّح هذه العمليات الحسابية نفسُها أن الحجر سيرسم مُنحنًى مكافِئًا خلال طيرانِه في الهواء، وتُخبرك أيضًا بسرعة الحجر عند أيِّ لحظةٍ بعد مفارقته ليدِك.

ولهذا يبدو أنَّ مزيجًا من العلوم والرياضيات يُمكِّننا من التنبُّؤ بسلوك الحجَر من لحظة انطلاقه إلى لحظةِ سقوطه على الأرض. ولكن، لا يتحقَّق ذلك إلا إذا كنَّا مُستعدِّين لوضع عددٍ من الافتراضات المبسَّطة؛ أهمها أن القوة الوحيدة المؤثِّرة على الحجر هي الجاذبيةُ الأرضية، وأنَّ هذه القوة لها المقدارُ والاتجاهُ نفسُهما في كل مكان. إلا أنَّ هذا الافتراض غيرُ صحيح؛ لأنه لا يأخذ في الحُسبان مقاومةَ الهواء، ودوَران الأرض، والتأثيرَ

الضئيل لجاذبية القمر، وحقيقةَ أن مَجال جاذبية الأرض يضعفُ كلَّما ارتفع الحجر، وكذلك التغيُّر التدريجي في الاتجاه «رأسيًّا إلى أسفل»، كلما تحرَّكْتَ من جزءٍ إلى آخر من سطح الأرض. وحتى إذا وافقت على العمليات الحسابية، فإن التوصية باستخدام زاوية قياسها 45 درجة يعتمد على افتراضٍ ضِمني آخر، وهو أن سرعة الحجر عندما يترك يدَك لا تعتمدُ على اتجاهه. وهذا، مرةً أخرى، غيرُ صحيح؛ لأنَّ رميَ الحجر يكون أقوى عندما تكون الزاوية أقربَ إلى الزاوية المستقيمة.

في ضوءِ هذه الاعتراضات، وبعضُها من الواضح أنه أكثرُ جِديةً من غيره، ما الموقف الذي على المرء أن يتَّخذه من العمليات الحسابية، والتوقُّعات الناتجة عنها؟ أحد الأساليب هي وضعُ أكبر عددٍ من الاعتراضات في الحسبان. ومع ذلك، فإن النَّهج الأصوبَ على النقيض من ذلك تمامًا؛ حدِّدْ مستوى الدقة الذي تُريده، وحاوِلْ تحقيقه بأبسطِ طريقةٍ ممكنة. وإذا علمتَ من خبرتك أن افتراضًا مبسَّطًا سيكون له تأثيرٌ ضئيل على الناتج، فينبغي لك الأخذُ بهذا الافتراض.

على سبيل المثال، سيكون تأثيرُ مقاومة الهواء على الحجر محدودًا نوعًا ما؛ لأن الحجر صغير، وصلد، ومُتماسكٌ إلى حدٍّ معقول. ولذا، لا مَغزى من تعقيدِ العمليات الحسابية بأخذِ مقاومة الهواء في الاعتبار، في الوقت الذي يُحتمَل فيه حدوثُ خطأٍ كبير وملحوظٍ في زاويةِ رمي الحجر على أي حال. فإذا رغبتَ في أخذ مقاومة الهواء في الاعتبار، فمن الجيد بما يكفي لمعظم الأغراض تطبيقُ القاعدة العامة التالية: كلَّما زادت مقاومةُ الهواء، تعيَّن رميُ الحجر بزاويةٍ أقربَ إلى الزاوية المستقيمة؛ لتعويض ذلك.

(٢) ما المقصود بالنموذج الرياضي؟

عندما يفحص المرءُ حلَّ مسألةٍ ما في الفيزياء، فإنه يحدث أحيانًا وليس دائمًا أن يُلاحظ فَرقًا واضحًا بين إسهامات العلوم وإسهامات الرياضيات. فالعلماء يضَعون نظرية، تعتمد في جزءٍ منها على نتائج الملاحظات والتجارِب، وتعتمد في جزءٍ آخرَ على اعتباراتٍ أكثرَ تعميمًا مثل التبسيط والقوة التفسيرية. ثم يفحص الرياضيُّون، أو علماءُ الرياضيات، النتائجَ المنطقية البَحْتة المترتبةَ على النظرية. وفي بعض الأحيان تكون هذه النتائجُ نِتاجَ عملياتٍ حسابية روتينية تتنبَّأ على وجه التحديد بأنواع الظواهر التي صُمِّمَت النظريةُ

لتفسيرها، لكن تنبُّؤات النظرية أحيانًا ما تكون غيرَ متوقَّعةٍ بالمرة. وإذا أثبتَت التجارِبُ صحةَ هذه التنبؤات لاحقًا، فإنه يكون لدَينا برهانٌ قوي يؤكِّد تأييدَ النظرية.

ومع ذلك، فإنَّ فكرة تأكيدِ تنبُّؤٍ علمي ما تكون محلَّ نظر إلى حدٍّ ما؛ نظرًا إلى ضرورة إجراء تبسيطاتٍ من النوع الذي ناقَشتُه سابقًا. لنأخُذْ مثالًا آخر: في قانونَيْ نيوتن لكلٍّ من الحركة والجاذبية يقتضي الأمرُ ضِمنًا أنك إذا أسقطتَ جسمَين من الارتفاع نفسِه، فإنهما يرتطمان بالأرض (إذا كانت مستوية) في الوقت نفسِه. كان جاليليو هو أولَ مَن أشار إلى هذه الظاهرة، وهي ظاهرةٌ غيرُ بديهيةٍ نوعًا ما. بل إنها في الحقيقة أسوأُ من ذلك؛ فإذا أجريتَ التجرِبةَ بنفسك باستخدام كُرتَين إحداهما للجولف والأخرى لتنس الطاولة، فإنك ستجدُ أن كرة الجولف ترتطم بالأرض أولًا. إذن، بأيِّ معنًى كان جاليليو مُحقًّا؟

وبالطبع، فإن مُقاومة الهواء هي السبب الذي جعَلَنا لا نعتبر هذه التجرِبةَ دحضًا لنظرية جاليليو أو إبطالًا لها؛ إذ يَثبُت بالتجرِبة صحةُ النظرية عندما تكون مقاومةُ الهواء صغيرة. إذا وجدتَ أنه من الأنسب أكثرَ مما ينبغي اعتبارُ مقاومة الهواء هي المُنقِذَ في كل مرةٍ تُخطئ فيها تنبؤاتُ ميكانيكا نيوتن، فسوف تستعيد إيمانَك بالعلوم، وإعجابَك بجاليليو إذا أُتيحَت لك فرصةُ مراقَبة ريشةٍ تسقط في الفراغ؛ إنها في الحقيقة تسقط تمامًا كما كان سيسقُط الحجر.

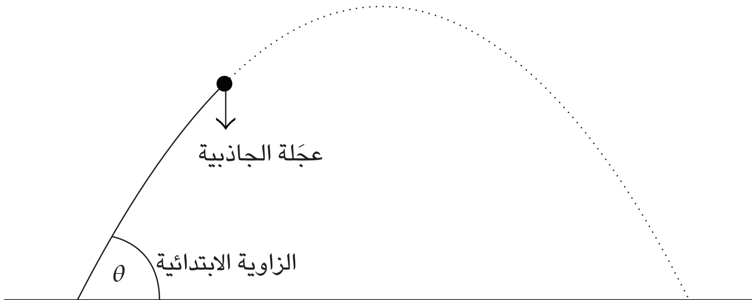
وعلى الرغم مما سبق، فإننا بحاجةٍ إلى طريقةٍ أفضلَ لوصفِ العلاقة بين العلوم والرياضيات؛ لأن الملاحظاتِ العلميةَ لا تكون مباشرةً وحاسمة تمامًا. والرياضيُّون لا يُطبِّقون النظريات العلمية تطبيقًا مباشرًا على أرض الواقع، ولكنهم بالأحرى يُطبقونها على النماذج. ومِن ثمَّ، يمكن التفكيرُ في النموذج بهذا المعنى بوصفِه رؤيةً تخيُّلية مبسَّطة لجزءٍ من الواقع موضعِ الدراسة، حيث تكون الحساباتُ الدقيقة ممكِنة. ففي حالة الحجر، على سبيل المثال، تُشبِه العلاقةُ بين الواقع والنموذج العلاقةَ بين الشكلَين ١-١ و١-٢ إلى حدٍّ ما.

تُوجَد العديدُ من الطرق لإنشاء نموذج لموقفٍ فيزيائي معيَّن، ويجب أن نستخدم مزيجًا من الخبرة واعتباراتٍ نظريةً أخرى لتحديدِ الشكل الذي مِن المحتمَل أن يكون عليه النموذجُ المُعطى ليُزودنا بمعلوماتٍ عن الواقع نفسِه. عند اختيار نموذجٍ ما؛ لا بد أن تكون الأولويةُ هي أن يتطابقَ سلوكُه بدقةٍ مع السلوك المُلاحَظ للعالم. ومع ذلك، ثَمة عواملُ أخرى — مثل البساطة والدقَّة الرياضية — يمكن غالبًا أن تحظى بقدرٍ أكبرَ من

الأهمية. في الواقع، تُوجَد نماذجُ مفيدةٌ للغاية لا تُشبه تقريبًا الواقعَ الفعليَّ على الإطلاق، كما سيتَّضح من بعض الأمثلة التي سأعرضُها.



شكل ١-١: مسار كرة في الهواء (أ)



شكل ١-٢: مسار كرة في الهواء (ب)

(٣) إلقاء زوج من النَّرْد

إذا ألقيتُ زوجًا من النَّرْد، وأردتُ أن أعرف كيف سيكون سلوكُه، فإنني أعرف بالتجرِبة أن هناك أسئلةً مُعيَّنة يكون من غير الواقعيِّ طرحُها. فمثلًا من غير المتوقَّع أن يُخبرني شخصٌ مقدمًا بناتجِ إلقاء النَّرْد في إحدى المرات، حتى إذا أُتيحَت له تكنولوجيا باهظةُ التَّكلِفة، فإنَّ إلقاء النَّرْد سيتمُّ آليًّا. وعلى النقيض من ذلك، فالأسئلة ذاتُ الطبيعة الاحتمالية مثل «ما احتمالُ أن يكون مجموعُ العددَين على كل نَرْدٍ سبعة؟» يمكن غالبًا الإجابةُ عنها، وربما تكون الإجابة مفيدةً إذا كنا — على سبيل المثال — نلعب لُعبة الطاولة مقابل المال. بالنسبة إلى النوع الثاني من الأسئلة، يُمكننا بسهولةٍ شديدة إنشاءُ نموذجٍ للموقف بتمثيل إلقاء النَّرْد على أنه اختيارٌ عشوائي لأحد الأزواج المرتَّبة الستة والثلاثين التالية:

$$
\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)
\end{array}
$$

يُمثِّل العددُ الأول في كل زوجٍ العددَ على النَّرْد الأول، ويُمثل العدد الثاني في كل زوجٍ العددَ على النَّرْد الثاني. وبما أن عددَ الأزواج المرتَّبة التي مجموعُها سبعةٌ هو ستة فقط، فإن احتمالات الحصول على هذا الناتج هي $6/36$ أو $1/6$.

ربما كان على المرء أن يعترضَ في هذا النموذج على أساس أن النَّرْد عند إلقائه يكون سلوكه موافقًا لقوانين نيوتن، ولو بدرجةٍ كبيرة من الدقة على أقلِّ تقدير، ومن ثَمَّ فإن الوضع الذي يتوقَّف عليه النَّرْد يكون عشوائيًّا. ومن حيث المبدأُ يمكن حسابُ توقُّفه. ومع ذلك، فكلمةُ «من حيث المبدأ» هنا فيها مُغالاة؛ لأن الحسابات تكون معقَّدةً جدًّا، ويجب أن تُبنى على معلوماتٍ أدق عن الشكل والتكوين، والسرعة الابتدائية، ودوَران النَّرْد، مما

يمكن قياسُه في الواقع. ولذلك، لا تُوجَد ميزةٌ على الإطلاق في استخدامِ نماذجَ أكثر حسمًا وتعقيدًا.

(٤) التنبُّؤ بالنموِّ السكاني

إنَّ العلوم «الأقل تجريبيَّةً» مثلَ علم الأحياء وعلم الاقتصاد مليئةٌ بالنماذج الرياضية التي تكون أبسطَ بكثيرٍ من الظاهرة التي تُمثلها، أو حتى تتغافل عمدًا عن الدقة بطرقٍ مُعيَّنة، لكنها، مع ذلك، مفيدةٌ ومعبِّرة. لنأخذ مثالًا من علم الأحياء ذا أهميةٍ اقتصادية كبيرة، نتصوَّر فيه أننا نرغب في التنبُّؤ بالتَّعداد السكانيِّ لبلدٍ ما في غُضون عِشرين عامًا. يمكننا استخدامُ نموذج بسيط للغاية، يُمثِّل البلد بأكمله على أنه زوجٌ من الأعداد $(t, P(t))$. حيث يُمثِّل t الزمنَ، ويُمثِّل $P(t)$ حجمَ السكان عند الزمن t. وبالإضافة إلى ذلك، فإنَّ لدَينا العددَين b وd اللذَين يُمثِّلان نسبةَ المواليد ونسبة الوفَيَات ويُعرَّفان بأنهما نسبةُ عدد المواليد ونسبة عدد الوفَيَات إلى عدد السكان، على الترتيب، في كلِّ سنة.

لنفترضْ أننا نعرف أن عدد السكان في بداية عام ٢٠٠٢ هو p. طبقًا للنموذج المُعرَّفِ توًّا، فإن عدد المواليد وعددَ الوفَيات خلال العام هما bP وdP على الترتيب، إذن يُصبح عدد السكان في بداية عام ٢٠٠٣ كالتالي: $P + bP - dP = (1 + b - d)\,P$. يصلح هذا البرهانُ مع أي عام؛ ولذا نحصل على الصيغة: $P\,(n + 1) = (1 + b - d)\,P(n)$، وهو ما يعني أنَّ عددَ السكان في بداية العام $n + 1$ هي $(1 + b - d)$ مضروبًا في عددِ السكان في بداية العام n. بعبارةٍ أخرى، يتضاعف عددُ السكان كلَّ عام بمقدار $(1 + b - d)$. ومن ثمَّ، فإنه يتضاعفُ خلال ٢٠ عامًا بمقدار $(1 + b - d)^{20}$، وهو ما يُعطينا ناتجَ المسألة الرئيسية.

بل إنَّ هذا النموذج الرئيسي جيدٌ بما فيه الكفاية لإقناعنا بأنه في حالِ ارتفاع معدَّل المواليد بدرجةٍ كبيرة عن معدَّل الوفَيات، فإن عدد السكان سيزداد بسرعةٍ كبيرة للغاية. ولكنه أيضًا غيرُ واقعي على نحوٍ يجعل تنبؤاتِه غيرَ دقيقة. على سبيل المثال، افتراض أنَّ نسبة المواليد ونسبة الوفَيات ستظلان كما هما مدةَ ٢٠ عامًا ليست مقبولة؛ ذلك أنهما قد تأثَّرا في الماضي بالتغيُّرات الاجتماعية والأحداث السياسية مثل التطورات الحادثة في مجال الطِّب، والأمراض الحديثة، وارتفاع متوسِّط العمر الذي تبدأ عنده النساءُ في الولادة، والحوافز الضريبية، والحروب الواسعةِ النطاق في أجزاءٍ متفرقة من العالم. سببٌ آخر لتوقُّع تغيُّر نسبة المواليد ونسبة الوفَيات مع مرور الزمن هو أن أعمار السكان في البلد الواحد ربما

تكون موزعةً على نحوٍ غير متساوٍ إلى حدٍّ ما. على سبيل المثال، إذا حدَث ارتفاعٌ مفاجئ في المواليد قبل ١٥ عامًا، فهناك مبررٌ لتوقُّع ارتفاع نسبة المواليد خلال ١٠ إلى ١٥ عامًا.

يستحثُّنا هذا على تعقيد النموذج بإضافة عواملَ أخرى. يمكننا أن نكتبَ نسبة المواليد ونسبة الوفَيات على هذا النحو $b(t)$ و$d(t)$ للإشارة إلى أنهما يتغيَّران مع مرور الزمن. وبدلًا من أن يكون لدينا عددٌ واحد $P(t)$ يُمثِّل حجم السكان، ربما يرغب المرءُ في معرفةِ عدد السكان في مجموعاتٍ عُمرية مختلفة. وربما من الجيد أيضًا أن نعرف قدْرَ الإمكان السلوكَ والمواقف الاجتماعية في هذه المجموعات العمرية؛ للتنبؤ بمعدلات المواليد والوفَيات المُحتمَلة في هذه المجموعات مُستقبلًا. الحصولُ على هذا النوع من المعلومات الإحصائية صعبٌ وباهظ التكاليف، إلا أن هذه المعلومات من شأنها أن تُحسِّن دقةَ التنبؤات بدرجةٍ كبيرة. ولهذا السبب لا يُوجَد نموذجٌ بعينِه أفضلُ من جميع النماذج الأخرى. على سبيل المثال، من المستحيل الجزمُ بأي درجةٍ من اليقين بالتغيُّرات الاجتماعية والسياسية المرتقب أن تحدث. ومِن ثمَّ فإن أقصى ما يمكن للمرء أن يأمُلَه في أي نموذجٍ هو التنبؤات ذاتُ النوع الشرطي، وهي التنبؤات التي تُخبرنا عن التأثيرات المرتقبة للتغيُّرات الاجتماعية والسياسية إذا حدثَت.

(٥) سلوك الغازات

وفقًا لنظرية الحركة للغازات التي قدَّمها دانييل برنولي عام ١٧٣٨، وتطوَّرَت على يد ماكسويل وبولتزمان وآخَرين في النصف الثاني من القرن التاسع عشر، فإن الغاز يتكوَّن من جُزَيئاتٍ متحرِّكة، وكثيرٌ من خصائصه، مثل درجة الحرارة والضغط، هي خصائصُ إحصائيةٌ لهذه الجزيئات. درجة الحرارة مثلًا تُناظِر متوسطَ سرعة الجزيئات.

ومع أخذِ هذه الفكرة في الاعتبار، فلْنُحاولْ وضْعَ نموذجٍ للغاز الموجود في صندوقٍ مكعَّب. يجب بالطبع تمثيلُ الصندوق بمكعَّبٍ (وهو تمثيلٌ رياضي وليس فيزيائيًّا)، وبما أن الجزيئاتِ صغيرةٌ جدًّا فمن الطبيعيِّ تمثيلُها بنقاطٍ داخل المكعب. من المفترض أن هذه النقاطَ تتحرَّك، ومِن ثمَّ يجب أن نُقرر القواعد التي تحكم حركتَها. وفي هذه المرحلة، علينا إجراءُ بعض الاختيارات.

إذا كان هناك جُزَيءٌ واحد في الصندوق، فستكون لدَينا قاعدةٌ واضحة: سوف يتحرك الجُزَيء بسرعةٍ ثابتة ثم يرتدُّ عائدًا من جُدران الصندوق عند اصطدامِه بها. وعليه، فإن أبسطَ طريقةٍ لتعميم هذا النموذج هي أخذُ عدد N من الجزيئات، حيث N عددٌ ما كبيرٌ،

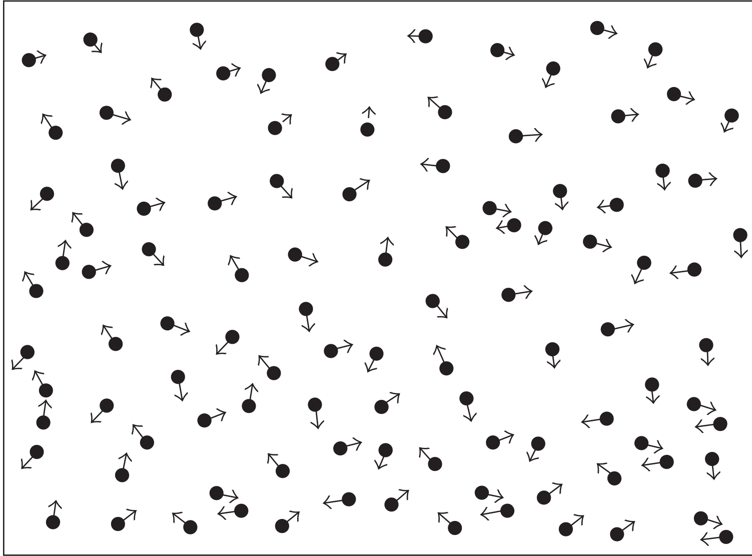
ونفترض أن جميع الجُزيئات سوف تسلك المسلكَ نفسَه، مع عدم وجودِ أيٍّ تفاعل بينها. ولكي نبدأ في استخدام النموذج المحتوي على عدد N من الجزيئات؛ علينا أن نختارَ مواقعَ وسرعاتٍ ابتدائيةً للجزيئات، أو بالأحرى نختار نقاطًا لتمثيلها. وإحدى الطرق الجيدةِ لعمل هذا هي الاختيار العشوائي، بما أننا نتوقَّع أن تنتشرَ الجزيئات الموجودة في غازٍ حقيقي في أي لحظة، وتتحركَ في اتجاهاتٍ متعددة.

ليس من الصعب أن نقول ما المقصودُ بنقطةٍ عشوائية في المكعب، أو المقصود باتجاهٍ عشوائي، ولكن الأقل وضوحًا هو كيفيةُ اختيار سرعةٍ عشوائيًّا، حيث إن السرعة يمكن أن تأخذ أيَّ قيمةٍ من صِفر إلى ما لا نهاية. وللتغلب على هذه الصعوبة؛ دعونا نضَع افتراضًا غيرَ معقول فيزيائيًّا، وهو أن كل الجزيئات تتحرَّك بالسرعةِ نفسِها، وأن المواقع والاتجاهات الابتدائية اختِيرَت عشوائيًّا. يوضح شكل ١-٣ نسخةً ثنائيةَ الأبعاد للنموذج الناتج.

إنه لَمِن قَبيل الإفراط في التبسيط افتراضُ أن كل الجزيئات البالغِ عددُها N تتحرَّك بمَنأًى تمامًا عن بعضها البعض، وهو بلا شك تبسيطٌ زائد عن الحَدِّ. على سبيل المثال، هذا يعني أنه لا أمَل في استخدام هذا النموذج لِفَهم السبب الذي يجعل الغازَ يتحوَّل إلى سائلٍ عند درجات الحرارة المنخفِضة بدرجةٍ كافية: لو أبطأَت النقاطُ في النموذج فستحصل على النموذج نفسِه دون تغيير، لكن الجزيئات تتحركُ ببطءٍ أكبر. وعلى الرغم من ذلك، فإنه يُفسِّر كثيرًا من سلوك الغازات الحقيقية. على سبيل المثال، تصوَّر ماذا كان سيحدثَ لو أننا صغَّرْنا الصندوقَ تدريجيًّا. كانت الجزيئات ستستمرُّ في الحركة بالسرعةِ نفسِها، ولكن نظرًا لأن الصندوق صار الآن أصغرَ فإنَّ مرَّات اصطدامها بالجدران تَزيد، وتكونُ مساحة الجدران المعرَّضةُ للاصطدام أقلَّ. ولهذين السببَين، فإن عدد الاصطدامات في الثانية في أي مساحةٍ مُعطاةٍ من الجدار ستُصبح أكبر. وهذه الاصطدامات تُفسِّر الضغط الذي يُمارسه الغاز، ومن ثمَّ نستنتج أنك إذا ضغطتَ الغاز في حجمٍ أقلَّ فسيزداد ضغطه على الأرجح، حسبما يتأكَّدُ ذلك بالمشاهدة والملاحظة. وثمة دليلٌ مُماثل يُفسِّر السبب في أنك لو رفعتَ درجةَ حرارة الغاز من دون أن تَزيد حجمه، يزداد ضغط الغاز أيضًا.

وليس من الصعب أبدًا استنتاجُ العلاقات العددية بين الضغط ودرجة الحرارة والحجم.

النَّموذج السابق يُشبه نموذجَ برنولي تقريبًا. كان أحدُ إنجازات ماكسويل أنه اكتشف برهانَ نظريةٍ بسيطة حَلَّت مشكلةَ كيفية اختيار السرعات الابتدائية بواقعيةٍ أكثر. ولِفَهم



شكل ١-٣: نموذج ثنائي الأبعاد لأحد الغازات

هذا دَعونا نبدأ باستبعادِ افتراضنا أن الجزيئات لا تتفاعل. بدلًا من ذلك، سنفترض أنها ستتصادم من حينٍ إلى آخَر، مثل زوجٍ من كُرات البلياردو الصغيرة، وبعدها ستتحركُ بسُرعاتٍ أخرى، وفي اتجاهاتٍ أخرى، تخضع لقوانين حفظ الطاقة، وكمِّية الحركة، لكنها فيما عدا ذلك تكون عَشوائية. بالطبع، من غير السهل رؤيةُ الكيفية التي ستفعل بها ذلك لو كانت نِقاطًا منفردة لا تَشغَل حجمًا، لكن هذا الجزء من البرهان نحتاج إليه فقط كمُبرِّر غيرِ شكلي لنوعٍ من العشوائية في سرعات الجزيئات واتجاهاتها. وضعَ ماكسويل سيناريوهَين مُحتملَي الحدوث جدًّا عن طبيعة هذه العشوائية؛ وهما أنها يجب ألَّا تتغير بمرور الوقت، وأنها لا تُميز بين اتجاهٍ وآخَر. وبوجهٍ عام، يعني الافتراضُ الثاني أنه إذا كان d_1 وd_2 اتجاهَين، وs هي سرعة مُعينة، فإن احتمالاتِ أن يتحرك جُسيمٌ بسرعة s في الاتجاه d_1 هي نفسُها احتمالاتُ أن يتحركَ بسرعةِ s في الاتجاه d_1. المدهش أن هذَين الافتراضَين كافيان لِنُحدِّد بالضبط الكيفيةَ التي يجب توزيعُ السرعات بها. بمعنى أنهما يُخبرانِنا أننا إذا أردنا أن نختار السرعات عشوائيًّا، فثَمة طريقةٌ بديهية واحدة لفعل ذلك. (يجب أن يكون تعيينُهما طبقًا للتوزيع الطبيعي، وهذا هو التوزيع الذي يُنتِج «منحنى الجرس»

الشهير، الذي يردُ ذِكره في عددٍ كبير من السياقات المختلفة، المتعلقة بالرياضيات والتجارِب على حدٍّ سواء).

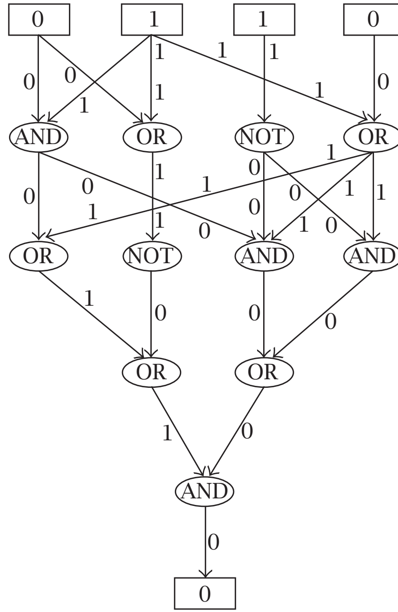
بمجرد اختيارنا للسرعات، نستطيع مرةً أُخرى أن نغُضَّ الطَّرْف تمامًا عن وجود تفاعلاتٍ بين الجزيئات. ونتيجةً لذلك، فإن النموذج المُحسَّن قليلًا سيشترك في كثيرٍ من عيوب النموذج الأول. ولا سبيلَ أمامنا لإصلاح ذلك إلا بوضعِ نموذج يُراعي هذه التفاعلاتِ بطريقةٍ أو أخرى. ويتَّضح أنه حتى النماذج البسيطة جدًّا لأنظمة الجسيمات المتفاعلة تتصرَّف بطريقةٍ مدهشة، وتُسفِر عن مشكلاتٍ رياضية صعبة للغاية، مُستحيلة الحل غالبًا.

(٦) نَمْذجة الدماغ البشري وأجهزة الكمبيوتر

يمكن أيضًا التفكيرُ في أجهزة الكمبيوتر بأنها مجموعةٌ من الأجزاء البسيطة التي يتفاعل أحدُها مع الآخر، ولهذا السبب غالبًا يَزْخر علم الكمبيوتر النظريُّ أيضًا بمشكلاتٍ مُهمة غيرِ محسومة. وفيما يلي مثالٌ جيدٌ لنوع الأسئلة التي ربما يرغب المرءُ في الإجابة عنها. لنفترض أن شخصًا اختار عددَين أوَّليَّين p وq، وضربَ العددَين معًا وأخبرَك أن الناتج هو pq. يمكنك إذن أن تعرف العددين p وq عن طريق أخذِ كل عدد أوَّليٍّ على التوالي، ومعرفةِ ما إذا كان يمكن أن ينتجَ حاصلُ الضرب pq. على سبيل المثال، إذا أُعطِيتَ العدد 91، فإنه يمكنك بسرعةٍ إثباتُ أنه ليس مُضاعَفًا للأعداد 2 أو 3 أو 5، ومن ثمَّ أنه يساوي 7×13.

ولكن، إذا كان p وq عددَين كبيرَين جدًّا — يتكون كلٌّ منهما من 200 رقم مثلًا — فإن طريقة المحاولة والخطأ هذه ستستغرقُ وقتًا طويلًا لا يمكن تصوُّره، حتى مع الاستعانة بجهازِ كمبيوتر فعَّال. (إذا أردت التدرُّبَ على هذا النوع من المسائل الصعبة وإتقانَها، فحاوِلْ أن تجد عددَين أوليَّين حاصل ضربهما 6901 وعددين آخرَين حاصل ضربهما 280123.) ومن ناحية أخرى، من الواردِ وجودُ طريقةٍ أذكى لتناوُل المسألة، يمكن استخدامها كأساسٍ لبرنامج كمبيوتر لا يستغرق وقتًا طويلًا في تشغيله. إذا تَمكَّنا من إيجاد هذه الطريقة، فإنها ستسمح بحلِّ التعليمات البرمجية التي تُبنى عليها غالبيةُ أنظمة الأمان الحديثة في الإنترنت وغيرها؛ لأن صعوبة حلِّ هذه التعليمات البَرمَجية يعتمد على صعوبة تحليل الأعداد الكبيرة إلى عواملها الأولية. ولذا، من الأفضل لو أن هناك طريقةً ما لإثباتِ عدم وجود إجراءٍ سريع وفعَّال لحساب p وq من حاصل ضربهما pq. وللأسف،

فإنه في الوقت الذي تُفاجئنا أجهزةُ الكمبيوتر باستمرارٍ بأوجُه استخدامها الممكِنة، فإننا لا نعرف شيئًا تقريبًا عما تعجز عن القيام به.



شكل ١-٤: برنامج كمبيوتر بسيط

قبل أن نبدأ التفكير في هذه المسألة، يجب أن نجدَ طريقةً ما نُمثِّل بها جهاز الكمبيوتر رياضيًّا، وتكون بسيطةً قدر الإمكان. يوضح شكل ١-٤ واحدةً من أفضل الطرق للقيام بذلك؛ إنه يتكوَّن من عددٍ من الطبقات تحتوي على رءوسٍ ترتبط معًا بخطوطٍ تُسمى الأضلاع. في الطبقة العُلوية تُكتَب «المُدخَلات»، وهي مُتتابعة من الأصفار والآحاد، ومن الطبقة السُّفلية نحصل على «المخرَجات»، وهي مُتتابعة أخرى من الأصفار والآحاد. والرءوس ثلاثةُ أنواع تُسمى بوَّابات AND وOR وNOT. كلُّ بوابة من هذه البوابات تستقبل بعضَ الأصفار والآحاد من الأضلاع التي أُدْخِلَت فيها من أعلى. واعتمادًا على ما تستقبله البوَّابة، فإنها عندَئذٍ تُرسِل أصفارًا أو آحادًا تبعًا للقواعد البسيطة التالية؛ إذا لم

تستقبل بوابة AND شيئًا إلا الآحاد فإنها تُرسل آحادًا في شكل مُخرَجات، وإلا فإنها تُرسل أصفارًا، وإذا لم تستقبل بوابة OR شيئًا إلا الأصفار، فإنها تُرسل أصفارًا كمُخرَجات، وإلا فإنها ترسل آحادًا. ولا يُسمح بدخول بوابة NOT من أعلى إلا لضِلع واحد فقط، ومن ثمَّ فإنها ترسل آحادًا إذا استقبَلَت 0، وتُرسل أصفارًا إذا استقبلت 1.

يُطلَق على مجموعةِ البوَّابات المرتبطة بواسطة أضلاع اسمُ «دائرة»، وما استعرضتُه هنا هو نموذج الدائرة الحسابي. السببُ في أن كلمة «الحسابي» مناسبةٌ هنا هو أن الدائرة يمكن التفكيرُ فيها بأنها تأخذ متتابعةً واحدة من الأصفار والآحاد، وتنقُلها إلى متتابعة أخرى، طبقًا لقواعدَ محددة سابقًا، من الممكن أن تكون معقدةً للغاية في حالِ إذا كانت الدائرةُ كبيرة. وهذا أيضًا ما تفعله أجهزةُ الكمبيوتر، على الرغم من أنها تُترجم هذه المتتابعاتِ إلى صِيَغٍ يمكن فهمُها مثل لُغات البرمجة العاليةِ المستوى والإطارات والأيقونات وهكذا. ومن ثَم يصبح من السهل جدًّا (من الناحية النظرية، ولكنه يظلُّ كابوسًا مروِّعًا من الناحية العَملية) تحويل أيِّ برنامج كمبيوتر إلى دائرة تُحوِّل المتتابعات المكوَّنة من أصفارٍ وآحاد طبقًا للقواعد نفسِها تمامًا. علاوةً على ذلك، الخصائص المهمَّة لبرامجِ الكمبيوتر تكون لها ما يُماثلها في الدوائر الناتجة.

وعلى وجه الخصوص، فإن عدد الرءوس في الدائرة يُقابل المدةَ الزمنية التي يستغرقها برنامجُ الكمبيوتر في تشغيله. ولهذا إذا استطاع المرءُ إثباتَ أن طريقةً معيَّنة لنقل مُتتابعات الأصفار والآحاد تحتاج إلى دائرةٍ كبيرة جدًّا، فإنه يكون قد أثبتَ كذلك أنها تحتاج إلى برنامجِ كمبيوتر يستغرق في تشغيله وقتًا طويلًا للغاية. تتمثل مَيزةُ استخدام نموذج الدائرة بدلًا من تحليل أجهزة الكمبيوتر في أنه أبسطُ وأسهل وأقرب إلى الواقع.

يمكن أن يُسفر تعديلٌ صغير في نموذج الدائرة عن نموذجٍ مفيد للدماغ البشري. والآن، بدلًا من الأصفار والآحاد، فإن المرءَ لدَيه إشاراتٌ مُتباينة في قوتها، يمكن تمثيلها بأعدادٍ ما بين صفرٍ وواحد. البوابات التي تُقابل الخلايا العصبية، أو خلايا الدماغ، مختلفةٌ أيضًا، لكنها ما زالت تتصرَّف بطريقةٍ بسيطة للغاية. تستقبل كلُّ بوابة بعضَ الإشارات من البوابات الأخرى. فإذا كانت القوة الكلية لهذه الإشارات — أي مجموعُ كلِّ الأعداد المقابلة — كبيرةً بدرجةٍ كافية، فإن البوابة تُرسِل إشاراتها الخاصةَ بقُوًى مُعيَّنة. وإلا، فإنها لا تُرسل أيَّ إشارة. وهذا يُقابل قرار الخلية العصبية في أن «تستجيب» أو لا.

يبدو أنَّ من الصعب الاعتقادَ بأن هذا النموذج يمكنه التقاطُ كل تعقيدات الدماغ. ومع ذلك، قد يكون ذلك صحيحًا جُزئيًّا؛ لأننا لم نقل شيئًا عن عدد البوابات التي ينبغي أن

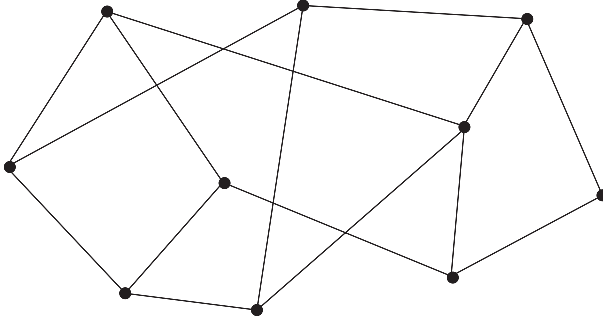
تكون موجودة، ولا الكيفية التي ينبغي ترتيبُها وَفقًا لها. يحتوي الدماغ البشريُّ النموذجي على نحوِ مائة مليون خليةٍ عصَبية مُرتَّبة بطريقةٍ معقَّدة جدًّا، وعلى ضوء المعرفة الحاليَّة بالدماغ، من غير الممكن أن نقول ما هو أكثرُ من ذلك، على الأقل فيما يتعلق بالتفاصيل الدقيقة. وعلى الرغم من ذلك، فإن النموذج يُمِدُّنا بإطارٍ نظري مُفيد للتفكير في آليَّة عملِ الدماغ، وأتاح للناس مُحاكاةَ بعض أنواع السلوك الشبيهة بالدماغ.

(٧) تلوين الخرائط وإنشاء الجداول الزمنية

لنفترض أنك صمَّمتَ خريطةً مُقسَّمة إلى قطاعاتٍ، وأردتَ أن تختار ألوانًا لهذه القطاعات. ورغبتَ في أن تستعمل أقلَّ عددٍ ممكنٍ من الألوان، لكنك لا ترغب في تعيين اللون نفسِه إلى قِطاعَيْن متجاورَيْن. نفترض الآن أنك أردتَ أن تُنشئ جدولًا زمَنيًّا لمحاضراتِ مقرَّرٍ جامعي مُقسَّم إلى وحداتٍ تعليميَّة. عدد المواعيد المتاحة للمحاضرات محدود، ومن ثَمَّ يحدُث تعارضٌ بين بعض الوحدات التعليمية وغيرها. ولدَيك قائمةٌ تُحدِّد كلَّ طالبٍ والوحدات التي يأخذُها، وتريد أن تختار المواعيد بحيث لا تتعارض وَحْدتان تعليميَّتان إلا إذا كان لا أحدَ يحضرهما معًا.

تبدو هاتان المسألتان مختلفتَين تمامًا، لكن باختيارِ نموذجٍ مناسبٍ يتَّضح من وجهة النظر الرياضية أنهما متطابقتان. في كِلتا الحالتَين يُوجَد بعض الكائنات (بلدان، وحدات تعليمية) يجب تعيينُ كائنٍ لها (لون، ميعاد). بعض أزواج الكائنات تكون غيرَ متوافِقة (البلدان المتجاورة، الوحدات التي ينبغي ألا تتعارَض) بمعنى أنه لا يُسمَح بتعيين الكائن نفسِه لها. في أيٍّ من المسألتَين، ما يَعنينا حقًّا هو ماهيَّةُ هذه الكائنات أو الكائنات التي عُيِّنَت لها، ومِن ثمَّ فربما نُمثِّلها على هيئةِ نقاطٍ وحَسْب. لتوضيح أزواج النقاط غيرِ المتوافقة يُمكننا توصيلُها بخطوطٍ للربط بينها. مجموعة النقاط التي يرتبط بعضُها بخطوطٍ هي بِنْية رياضيةٌ معروفة باسم الرسم. يُقدِّم لنا شكلُ ١-٥ مثالًا بسيطًا على ذلك. ومن المعتاد أن تُسمَّى النقاط في الرسم بالرءوس، والخطوطُ بالأضلاع.

عندما نُمثِّل المسائلَ بهذه الطريقة، تُصبح مهمتُنا في الحالتَين أن نُقسِّم الرءوس إلى عددٍ صغير من المجموعات بحيث لا تحتوي أيُّ مجموعةٍ على رأسَين مرتبطَين بضلع. (الرسم في شكل ١-٥ يمكن تقسيمه إلى ثلاثِ مجموعاتٍ من هذا النوع، لكن لا يمكن تقسيمُه إلى مجموعتَين فقط.) هذا يُوضح سببًا آخَر وجيهًا جدًّا لإنشاءِ نماذجَ بسيطةٍ قدْر



شكل ١-٥: رسم له ١٠ رءوس، و١٥ ضلعًا

الإمكان؛ إذا حالفَك الحظ، فربما يمكن استخدامُ النموذج نفسِه لدراسة ظواهرَ مختلفةٍ جملةً واحدة.

(٨) معانٍ مختلفةٌ لكلمة «مُجرَّد»

عند إنشاء نموذج، فإننا نُحاول قدْر الإمكان تجاهُلَ ما يمكن تجاهلُه من الأمور المتعلقة بالظاهرة قيد الدراسة، ونستخلص منها فقط السِّمات الأساسيةَ لِفَهم سلوكِها. في الأمثلة التي نوقِشَت اختُزِلَت الأحجارُ إلى نقاطٍ مفردة، واختُزِلَ سكان أيِّ بلدٍ إلى عددٍ واحد، واختُزِلَ الدماغ إلى شبكةٍ من البوابات التي تخضع لقواعدَ رياضيةٍ بسيطة للغاية، واختُزِلَ التفاعلُ بين الجزيئات إلى صفرٍ أو لا شيء. إنَّ البِنَى الرياضيةَ الناتجة هي تمثيلاتٌ مجرَّدة للمواقف المادِّية الجاريةِ نمْذَجَتُها.

الرياضياتُ موضوعٌ مجرَّد من منظورَين؛ إنها تستخلص السِّماتِ المهمةَ من مشكلةٍ ما، وإنها تتعامل مع كائناتٍ غير مادية وغير ملموسة. وسوف يُناقش الفصلُ التالي مفهومًا ثالثًا أعمقَ للتجريد في الرياضيات، وهو ما أعطانا المثالُ المذكور في الجزء السابق فكرةً عنه بالفعل. الرسم هو نموذجٌ مَرِن جدًّا له استخداماتٌ كثيرة. ومع ذلك، فلا داعيَ عند دراسة الرسوم أن يأخذ المرءُ استخداماتها في الاعتبار؛ لا يُهم إذا كانت النقاطُ تُمثِّل قطاعاتٍ أو محاضراتٍ أو غير ذلك تمامًا. يمكن للباحث النظريِّ في مجال الرسوم أن يترك العالَمَ الواقعيَّ كُليةً وراءه ويدلفَ إلى عالم التجريد البَحْت.

الفصل الثاني

الأعداد والتجريد

(١) الطريقة المجردة

قبل بضعة أعوام، استُهِلَّ مقالٌ نقديٌّ في الملحَق الأدبي لجريدة التايمز بالفِقرة التالية:

> إذا كان $0 = 0 \times 0$ و$1 = 1 \times 1$، فهذا يستتبع وجودَ أعدادٍ هي مربَّعاتُ نفسِها. ولكنه يستتبع بدوره وجودَ أعداد. وبخطوةٍ واحدة بسيطة لا تتطلب أيَّ مهارة، نجد أننا قد تقدَّمنا فيما يبدو من موضوعٍ في الحساب الابتدائي إلى استنتاجٍ فلسفي مُذهل ومَثارِ جدلٍ كبير، وهو أن الأعداد موجودة. وكان المرء يظنُّ أن الأمر يُفترَض أن يكون أصعبَ من ذلك.
>
> مقالٌ نقدي لإيه دبليو مور عن كتاب «العقلانية الواقعية» لمؤلِّفه جيرولد جيه جاتس، في الملحق الأدبي لجريدة التايمز، بتاريخ ١١ سبتمبر ١٩٩٨.

يمكن الردُّ على هذا الجدل بطرقٍ عدَّة، ومن غير المحتمل أن يأخذه أحدٌ على محمَل الجِد، بمَن فيهم الناقد. ومع ذلك، يُوجَد بالتأكيد فلاسفةٌ يأخذون مسألةَ وجودِ الأعداد من عدمه بجِدِّية، وهو ما يُميِّزهم عن علماء الرياضيات، الذين يجدون مسألةَ وجود الأعداد بديهيةً وواضحة، أو لا يفهمون كُنه المسألةَ المطروحة. يهدف هذا الفصلُ بصفةٍ أساسية إلى شرح الأسباب التي على أساسها يمكن لعلماءِ الرياضيات (بل ويتعيَّن عليهم) تَجاهلُ هذه المسألة التي تبدو في ظاهرها أساسيَّة.

يتجلَّى سخفُ الجدل «البسيط إلى حدِّ السذاجة» بشأنِ وجود الأعداد إذا نظر المرءُ في جدلٍ مُماثل بشأن لُعبة الشِّطْرَنْج. لنفترض أن المَلك الأسود في الشِّطرَنج يُسمَح له

أحيانًا بالتحرُّك في اتجاهٍ قُطري مسافةَ مربعٍ واحد، فإنه يترتبُ على ذلك وجودُ قِطَع من الشِّطرنج يُسمح لها أحيانًا بالتحرك في اتجاهٍ قُطريٍّ مُربعًا واحدًا، وهذا يستتبع بدوره وجودَ قِطَع الشطرنج من الأساس. وبالطبع، لا أعني بذلك أن أُشير ببساطةٍ إلى أن الناس أحيانًا يَبْنون ألواحَ الشطرنج — ففي النهاية، يمكن لعبُ الشطرنج من دون هذه الألواح — ولكن ما أعنيه هو النتيجة الفلسفية الأكثر «إذهالًا»؛ بأنَّ قِطَع الشطرنج تُوجَد بشكلٍ مُستقلٍّ عن مَظاهرها المادية.

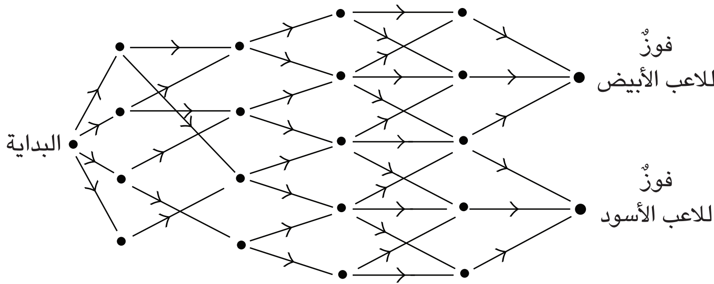
ما الذي يَعنيه الملكُ الأسود في لُعبة الشطرنج؟ هذا سؤالٌ غريب، ويبدو أن أحسنَ طريقة للتعامل معه هي تنحيتُه جانبًا قليلًا. فماذا عساه أن يفعل المرءُ أكثرَ من الإشارة إلى لوح الشِّطرنج وشرحِ قواعد اللُّعبة، ربما مع إيلائه اهتمامًا خاصًّا لدور الملك الأسودِ في أثناء ذلك؟ ما يُهم في الملك الأسود ليس وجوده ولا طبيعته الذاتية، ولكن الوظيفة التي يُؤدِّيها في اللُّعبة.

الطريقة المجرَّدة في الرياضيات، كما تُسمَّى أحيانًا، هي النتائج المترتِّبة على اتخاذ المرءِ موقفًا مُماثلًا تجاهَ الكائنات الرياضية. يمكن تلخيصُ هذا الموقف في الشِّعار الآتي: يَكمُن معنى الكائن الرياضي في وظيفته. كثيرًا ما ظهرَت شِعاراتٌ مُشابهةٌ في فلسفةِ اللغة، وهي شِعاراتٌ يمكن أن تكون مثيرةً للجدل على نحوٍ كبير. وفيما يلي مِثالان على ذلك: «في اللغة لا يُوجَد سِوى الفروقِ والاختلافات»، و«يكمن معنى الكلمةِ في استعمالها في اللُّغة»، ويرجع هذان المثالان إلى سوسور وفيتجنشتاين على الترتيب (راجع جزء «قراءات إضافية»)، ويمكن للمرء أن يُضيف الرأيَ الذي اجتمَع عليه أنصارُ الوضعية المنطقية، وهو أنَّ: «معنى أيِّ تصريح يكمُن في طريقة التحقُّق من صحته». فإذا وجدتَ أن تصريحي غيرُ مُستساغ لأسبابٍ فلسفيَّة، فعليك عندَئذٍ أن تُفكِّر فيه من منظورِ أنه موقفٌ يمكن للمرء تبنِّيه أحيانًا، وذلك بدلًا من اعتباره حُكمًا أو تصريحًا مُطلقًا يفتقر إلى وجود بيِّنة أو دليل. وفي الواقع، من الضروري للمرء أن يتمكَّن من تبنِّي هذا الموقف من أجل أن يتوصَّل إلى فَهمٍ صحيح للرياضيات المتقدِّمة، وهذا ما آمُل أن أوضِّحه هنا.

(٢) الشِّطرنج بدون قطع فعلية

من المُمتع أن نرى الشِّطرنج — وإن كنتُ لا أستند إليه في مناقشتي — أو أي لُعبة مشابهة، وهو يُنَمْذَج باستخدام الرسوم. (عرَّفنا الرسوم في نهاية الفصل السابق.) تُمثل

رءوسُ الرسم الأوضاعَ الممكِنة في اللُّعبة. ويُوصَّل الرأسان P وQ بضِلع واحد إذا أدَّى الشخص في الموضع P في دوره نقلةً قانونية انتقَل على أساسها إلى الموضع Q. وبما أنه ربما لا يمكن الرجوعُ من P إلى وQ مرة أخرى، فلا بد من وضع أسهُم على الأضلاع توضِّح اتجاهها. هناك رءوس معيَّنة تُعتبر فوزًا للَّاعب الأبيض، ورءوس أخرى تعتبر فوزًا للَّاعب الأسود. تبدأ المباراة عند رأسٍ معيَّن يُمثِّل وضعَ البداية في اللُّعبة. ثم يتبادل كلُّ لاعبٍ الدورَ ليتحرك مُتقدمًا على طول الأضلاع. فيحاول اللاعبُ الأول الوصولَ إلى إحدى الرءوس البيضاء الرابحة، ويحاول الثاني الوصولَ إلى إحدى الرءوس السوداء الرابحة. يوضح الشكلُ ٢-١ نموذجًا أبسطَ بكثيرٍ لمباراة الشطرنج هذه (من الواضح في هذه المباراة أن اللاعب الأبيض لدَيه استراتيجيةٌ رابحة).

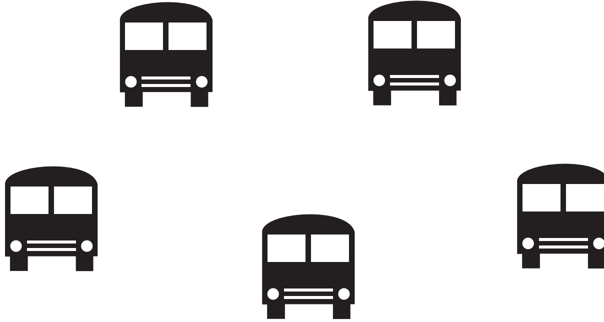


شكل ٢-١: بداية المباراة عند اللاعب الأبيض، ولدَيه استراتيجية رابحة

هذا النموذج المرسوم لِلُعبة الشطرنج، وإن كان غيرَ عمَلي بالمرة؛ لوجود عددٍ كبير جدًّا من مواضع الشطرنج الممكِنة، فإنه مِثاليٌّ من منظورِ أن المباراة الناتجةَ تُكافئ تمامًا مباراةَ الشطرنج الحقيقية. ومع ذلك، فإنني عندما عرَّفتُه لم أذكر قِطعَ الشطرنج أبدًا. ومن هذا المنطلق، يبدو من غير العاديِّ تمامًا أن نسأل عن وجود الملكِ الأسوَد؛ لوح الشطرنج وقِطَعُه ما هي إلا مبادئُ مُنظِّمة ملائمة، تُساعدنا على التفكير في النسَق المذهل للرءوس والأضلاع في الرسوم الكبيرة. إذا قُلنا شيئًا مثل «الملك الأسود معرَّض للتهديد» فإن ذلك يعني اختصارًا لجملةٍ تُعيِّن قائمةً طويلة للغاية من الرءوس، وتُخبرنا أن اللاعبَيْن قد وصلا إلى أحَدِها.

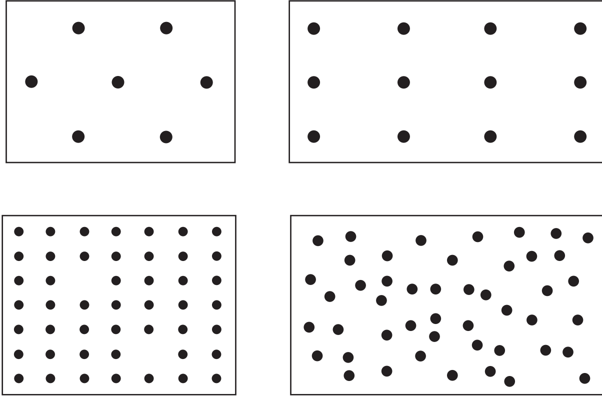
(٣) الأعداد الطبيعية

إنَّ مصطلح «الطبيعية» هو اسم أعطاه علماءُ الرياضيات للأعداد المألوفة $1, 2, 3, \ldots$. وهي من أهم الكائنات الأساسية في الرياضيات، لكن يبدو أنها لا تُشجِّعنا على التفكير بطريقةٍ مجردة. فماذا عساها أن تكون وظيفةُ عددٍ مثلِ العدد 5 بعد كل ذلك؟ إنه لا يتحرك في حيزٍ مثل قطعة الشطرنج. بل يبدو بدلًا من ذلك أنَّ له طبيعةً ذاتية، نوع من الخَمْسية الخالصة التي نستوعبها على الفور عندما ننظر إلى صورةٍ كالمعروضة في شكل ٢-٢.



شكل ٢-٢: مفهوم الخَمْسية

ومع ذلك، فإنَّ هذه الطبيعة الخالصة تتراجعُ قليلًا عندما نتناول أعدادًا أكبر. يُقدِّم لنا شكل ٢-٣ تمثيلاتٍ للأعداد 7 و12 و47. ربما يستوعب بعض الأشخاص على الفور مفهوم السَّبْعية من الصورة الأولى، لكن في عقول معظم الأشخاص ستكون هناك فكرةٌ خاطفة مثل: «النقاط الخارجية تُكوِّن سداسيَّ أضلاع؛ ومِن ثمَّ عندما نجمع ذلك مع النقطة المركزية، فإننا نحصل على $7 = 1 + 6$». وبالمثل، من المرَّجح أن نُفكِّر في العدد 12 على أنه 4×3 أو 6×2. أما بالنسبة إلى العدد 47، فلا يُوجَد شيء مميَّز على نحوٍ خاص في مجموعةِ ذلك العدد من الكائنات، على عكس العدد 46 مثلًا. إذا رُتِّبَت النِّقاطُ في نمطٍ ما، مثل شبكة 7×7 مع حذف نقطتَين، فيمكننا بمعلوميَّةِ أنَّ $47 = 49 - 2 = 7 \times 7 - 2$



شكل ٢-٣: طرقُ تمثيل الأعداد 7 و12 و47 (مرتَيْن)

أن نتوصل سريعًا إلى عدد النقاط الموجودة. وإلا، فلن يكون أمامنا سِوى أن نَعُدَّها، بأن نُفكِّر في العدد 47 هذه المرةَ بأنه العددُ الذي يأتي بعد 46، الذي هو نفسُه العدد الذي يأتي بعد 45 وهكذا.

بعبارةٍ أخرى، لا يُشترَط أن تكون الأعداد كبيرةً للغاية للتوقُّف عن التفكير فيها ككائناتٍ معزولة، والبدء في فَهمِها من خلالِ خصائصها، ومن خلال علاقتها بالأعداد الأخرى، ومن خلال دَورها في نظام الأعداد. هذا ما قصَدتُ إليه عند حديثي عن «وظيفة» العدد.

أصبح واضحًا الآن أن مفهوم العدد يرتبطُ جوهريًّا بالعمليات الحسابية للجمعِ والضرب. مثلًا: بدون بعض مفاهيم الحساب لا يسَعُ المرءَ أن يستوعِبَ بوضوحٍ معنى عددٍ مثل $1,000,000,017$. نظام الأعداد ليس مجردَ مجموعةٍ من الأعداد، بل مجموعة من الأعداد مع وجود قوانينَ تُحدد كيفيةَ إجراء العمليات الحسابية عليها. ثَمة طريقة أخرى لتلخيص الأسلوب المجرَّد؛ فكِّر في القواعد بدلًا من الأعداد نفسِها. وبِناءً على وجهة النظر هذه، الأعداد رموزٌ في نوعٍ من الألعاب (أو ربما يجب أن نُسمِّيَها عدَّادات).

لتكوينِ فكرة عن ماهيَّة هذه القواعد، دعونا نتناوَلْ مسألةً حِسابية بسيطة: كيف يتأكَّد المرء من أن $38 \times 263 = 9994$؟ ربما يلجأُ معظم الأشخاص إلى التحقُّق من ذلك

باستخدام الآلة الحاسبة، ولكن إذا لم يكن ذلك ممكنًا لسببٍ ما، فربما يُفكِّرون على النحو التالي:

$$\begin{aligned} 38 \times 263 &= 30 \times 263 + 8 \times 263 \\ &= 30 \times 200 + 30 \times 60 \times 30 \times 3 + 8 \times 200 + 8 \times 60 + 8 \times 3 \\ &= 6000 + 1800 + 90 + 1600 + 480 + 24 \\ &= 9400 + 570 + 24 \\ &= 9994 \end{aligned}$$

ولكن، لماذا تبدو هذه الخُطوات صحيحةً للعِيان؟ على سبيل المثال، لماذا يُدرك المرء على الفور أن $30 \times 200 = 6000$؟ تعريف العدد 30 أنه حاصلُ ضربِ 3×10 وتعريفُ العدد 200 أنه حاصل ضرب $2 \times (10 \times 10)$، وعليه يُمكننا القول بثقةٍ تامة إن $30 \times 200 = (3 \times 10) \times (2 \times (10 \times 10))$. ولكن لماذا العدد 6000 هذا؟

بطبيعة الحال، لن يَعبأَ أحدٌ بطرح هذا السؤال، لكن في حالِ طَرْحِه، يمكننا الإجابةُ بأن:

$$(3 \times 10) \times (2 \times (10 \times 10)) = (3 \times 2) \times (10 \times 10 \times 10) = 6 \times 1000 = 6000$$

سنجد أننا نستخدِم حقيقتَين معروفتَين عن الضرب دون التفكير حقًّا فيه، وهما أن: حاصلَ ضربِ أيِّ عددَين لا يتغيَّر، بل يبقى نفسه مَهما تغيَّر ترتيبُ العددَين. وحاصل ضرب أكثرَ من عددَين لا يتغيَّر مهما كانت صورةُ تجميع الأعداد باستخدام الأقواس؛ إذ لا يُشكِّل ذلك فارقًا. على سبيل المثال، $7 \times 8 = 8 \times 7$ و$31 \times (34 \times 35) = (31 \times 34) \times 35$. لاحظ أن الحسابات البينيَّة في المثال الثاني من هذَين المثالَين تتأثَّر بالتأكيد بالأقواس، لكننا نعلم أن الناتج النهائيَّ سيظلُّ كما هو.

يُسمَّى هذان القانونان بقانون الإبدال وقانون التجميع في عملية الضرب. دعوني أسرُدْ لكم بعضَ القواعد، بما فيها هذان القانونان، التي نستخدمها عادةً عند الجمع والضرب.

قانون الإبدال للجمع: $a + b = a + b$ لأيِّ عددَين a وb.

قانون التجميع (الدمج) للجمع: $a + (b + c) = (a + b) + c$ لأي ثلاثةِ أعداد a وb وc.

قانون الإبدال للضرب: $ab = ba$ لأي عددَين a وb.

قانون التجميع (الدمج) للضرب: $a\,(bc) = (ab)\,c$ لأي ثلاثة أعداد a وb وc.

قانون المحايد الضربي: 1 هو المحايد الضربي: $1a = a$ لأي عدد a.

قانون التوزيع على الجمع: $(a + b)\,c = ac + bc$ لأي ثلاثة أعداد a وb وc.

سرَدتُ هذه القوانينَ للتنبيهِ على الدَّور الذي تلعبه في تفكيرنا، لا للإقناع بأنها مهمةٌ في ذاتِها، حتى عن الجُمَل الرياضية البسيطة تمامًا. اقتناعنا بأن $2 \times 3 = 6$ يستند على الأرجح إلى صورةٍ مثلِ هذه.

ومن ناحية أخرى، فإن طريقة الفَهم المباشرةَ غيرُ واردة على الإطلاق إذا كنا نريد إثبات أن $38 \times 263 = 9994$، ولذا فإننا نُفكر في هذه الحقيقة الأكثرِ تعقيدًا بطريقةٍ مختلفة تمامًا، باستخدام قوانين الإبدال والتجميع (الدمج) والتوزيع. وإذا طبَّقنا هذه القوانين، فإننا نُصدِّق الناتج. بل الأكثرُ من ذلك أننا نُصدِّقه حتى إذا لم يكن لدَينا فَهمٌ مرئيٌّ لما يمكن أن يبدوَ عليه عددُ 9994 من الكائنات.

(٤) الصفر

تاريخيًّا، تطوَّرَت فكرةُ العدد صفر في وقتٍ لاحِق من تطوُّرِ فكرة الأعداد الموجبة. وبدا هذا غامضًا ومتناقضًا لكثيرٍ من الناس، حيث أثار الأمر أسئلةً من قَبيل: «كيف يُمكن لشيءٍ أن يكون موجودًا وهو مع ذلك لا شيء؟» ولكن من وجهةِ النظر المجرَّدة، فإنَّ للصفر معنًى مباشرًا للغاية؛ وهو أنه مجردُ رمزٍ جديد دخَل في نظامنا العدديِّ وله الخاصيةُ المميزة التالية.

قانون المحايِد الجَمْعي: الصفر هو المحايد الجمعي: $0 + a = a$ لأي عدد a.

وهذا هو كل ما تحتاج إلى معرفته عن الصفر. ليس ما يَعنيه الصفر في ذاته، ولكن مجرد قانون صغير يُخبرك بوظيفته.

ماذا عن الخصائص الأخرى للعدد صفر، مثل حقيقة أن حاصلَ ضرب الصفر في أيِّ عددٍ يكون صفرًا؟ أنا لم أذكر هذا القانونَ في القائمة أعلاه؛ لأنه يمكن استنتاجُه من قانون المحايِد الجمعي والقوانين السابقة. فيما يلي، على سبيل المثال، طريقةُ إثبات أن $0 \times 2 = 0$، حيث 2 هو حاصل جمع $1 + 1$. يخبرنا قانون الإبدال للضرب أن $0 \times 2 = 2 \times 0$. ثم يخبرنا قانون التوزيع أن $(1 + 1) \times 0 = 1 \times 0 + 1 \times 0$. ولكن $1 \times 0 = 0$ طبقًا لقانون المحايد الضربي، ومِن ثمَّ فإن هذا يساوي $0 + 0$. يقتضي قانون المحايد الجمعي أن $0 + 0 = 0$، وإلى هنا ينتهي البرهان.

ربما لو طرحنا برهانًا غير مجرد بديلًا سيكون شيئًا على هذا النحو: «يعني 2×0 جمع اثنين من لا شيء، وإذا فعلت ذلك فإن الناتج هو لا شيء، أي صفر». لكن طريقة التفكير هذه تجعل من الصعب الإجابةَ عن أسئلةٍ مثل السؤال الذي طرَحَه ابني جون (عندما كان في السادسة من عمره): كيف يكون لا شيء، مضروبًا في لا شيء يؤدِّي إلى لا شيء؛ لأن ذلك يعني أنك لا تملك أيَّ شيء؟ الإجابة الصحيحة، ولو أنها لم تكن مناسبةً في ذلك الوقت، هي التي يُمكن استنتاجها من القوانين كالآتي. (كتبتُ القانون الذي استخدمتُه بعد كل خطوة.)

- $0 \times 1 = 0$ (المحايد الضربي)
- $0 \times (1 + 0) =$ (المحايد الجمعي)
- $0 \times 1 + 0 \times 0 =$ (قانون التوزيع على الجمع)
- $0 + 0 \times 0 =$ (المحايد الضربي)
- $0 \times 0 + 0 =$ (قانون الإبدال للجمع)
- $0 \times 0 =$ (المحايد الجَمْعي)

لماذا أُعطي هذا البرهانَ المستفيض لإثبات حقائقَ أوليةٍ للغاية؟ مرةً أخرى، ليس لأنني أجدُ البراهين ممتعةً رياضيًّا، ولكن لأنني أرغبُ في بيانِ ما يَعنيه تعليلُ الجُمَل الحسابية وتسويغُها بطريقةٍ مجرَّدة (باستخدام بعض القواعد البسيطة، دون أن نُجهِد أنفسنا بماهيَّة الأعداد فعليًّا) بدلًا من التفسير المادي الملموس (بالتفكر فيما تَعنيه الجُمَل). ومن المفيد جدًّا — بالطبع — أن نَربط المعانيَ والصور الذهنية بالكائنات الرياضية، لكن، كما سنرى كثيرًا في هذا الكتاب، غالبًا ما يكون هذا الربطُ غيرَ كافٍ لإخبارنا بما علينا فِعلُه في السياقات الجديدة غيرِ المألوفة. ولهذا، تصبح الطريقة المجردة لا غِنَى عنها.

(٥) الأعداد السالبة والكسور

كما يعرف أيُّ شخص لدَيه خبرة في تدريس الرياضيات للأطفال، يُوجَد شيءٌ غيرُ مباشر فيما يخصُّ عمليَّتَي الطرح والقِسمة يجعلهما أصعبَ فهمًا من عمليتَي الجمع والضرب. يمكن بالطبع استخدامُ مفهوم الحذف لشرح عملية الطرح، وذلك بطرح أسئلة مثل: «إذا كان لدَينا خمس برتقالاتٍ، وأكلنا اثنتَين، فما عدد البرتقالات المتبقية؟» ومع ذلك، هذه ليست دائمًا الطريقةَ المُثلى للتفكير في الأمر. على سبيل المثال، إذا طُلِب منا طرح 98 من 100، فمن الأفضل عندَئذٍ ألا نُفكر في طرح 98 من 100، ولكن فيما ينبغي أن نُضيفه إلى 98 للحصول على 100. ومن ثمَّ، فما نفعله عمليًّا هو حلُّ المعادلة $98 + x = 100$، على الرغم من أنه من غير المعتاد بالطبع أن يَخطر الحرف x على أذهاننا خلال إجراءِ هذه العملية الحسابية. وبالمثل، تُوجَد طريقتان للتفكير في عملية القسمة. لشرحِ معنى 50 مقسومًا على 10، يمكنك إما أن تسأل: «إذا قسَّمتَ 50 عنصرًا إلى 10 مجموعاتٍ مُتساوية، فكم عنصرًا سيُوجَد في كل مجموعة؟» أو تسأل: «إذا قسَّمت 50 عنصرًا إلى مجموعاتٍ من 10، فكم سيكون عددُ المجموعات»؟ النهج الثاني يُكافئ السؤالَ «10 مضروبًا في كم يساوي 50؟» وهو ما يُكافئ بدوره حلَّ المعادلة $10x = 50$.

من الصعوبات الأخرى في شرح عمليَّتَي الطرحِ والقسمة للأطفال أنهما لا يتحقَّقان دائمًا. على سبيل المثال، لا يمكنك أن تأخذ عشْرَ برتقالاتٍ من طبقٍ به سبعٌ، كما أنه لا يمكن لثلاثة أطفال أن يتَقاسَموا إحدى عَشْرة كرةً زجاجية صغيرة بالتساوي بينهم. ومع ذلك، لم يمنع ذلك الكِبارَ من طرح 10 من 7 أو قسمةِ 11 على 3، حيث يحصلون على الناتج -3 والناتج $11/3$ على الترتيب. وهذا بدوره يطرح السؤال: هل العددان -3 و$11/3$ موجودان فعلًا؟ وإذا كانا موجودَين، فما هما؟

من وجهة النظر المجردة يمكن التعاملُ مع هذه الأسئلة مثلما فعَلنا مع العدد صفر؛ بأن ننسى أمْرَها. كلُّ ما علينا معرفتُه عن -3 أننا عندما نُضيف إليه 3 فإننا نحصل على صفر، وكلُّ ما علينا معرفتُه عن $11/3$ أننا عندما نضربُه في 3 فإننا نحصل على 11. هذه هي القواعد، وجنبًا إلى جنبٍ مع القواعد السابقة، فإنها تسمح لنا بإجراءِ عملياتٍ حسابية في نظام أعدادٍ أكبر. لماذا ينبغي لنا توسيعُ نظام الأعداد على هذا النحو؟ لأنه يُعطينا نموذجًا يمكن فيه حلُّ معادلات مثل $x + a = b$ و$ax = b$، أيًّا كانت قيمة a

وقيمة b، بشرطِ ألا تُساويَ a صفرًا في السؤال الثاني. بعبارة أخرى، إنها تُعطينا نموذجًا تتحقَّق فيه دائمًا عمليَّتَا الطرح والقسمة، ما دُمنا لا نحاول القسمةَ على صفر. (سنُناقش مسألةَ القسمة على صفرٍ لاحقًا في هذا الفصل.)

في الواقع، نحتاج إلى قانونَين آخَرين لتوسيع نظام الأعداد على هذا النحو: أحدهما لإدخال الأعداد السالبة، والآخَر لإدخال الكسور، أو الأعداد النسبية، كما هي معروفةٌ عادةً.

المعكوس الجمعي: لأي عدد a يُوجَد عدد b بحيث يصبح $a + b = 0$.

المعكوس الضربي: لأي عدد a باستثناء صفر يُوجَد عدد c بحيث يصبح $ac = 1$.

في ضوء هذين القانونَين، يمكننا التفكير في $-a$ و$1/a$ كترميز للعددَين b في قانون المعاكس الجَمْعي وc في قانون المعاكس الضربي على الترتيب. وفيما يخصُّ تعبيرًا أكثرَ تعميمًا مثل p/q، فإنه يرمز إلى p مضروبًا في $1/q$.

يقتضي قانونا المعكوس الجمعي والمعكوس الضربي قانونَين آخرَين، يُعرَفان بقوانين الحذف.

قانون الحذف للجمع: إذا كانت a وb وc أيَّ ثلاثةِ أعداد و$a + b = a + c$، فإن $b = c$.

قانون الحذف للضرب: إذا كانت a وb وc أيَّ ثلاثة أعداد وa ليس صفرًا و$ab = ac$، فإن $b = c$.

أُثبِتَ القانونُ الأول بإضافة $-a$ إلى كِلا الطرفين، والقانونُ الثاني بضرب كلٍّ من الطرفَين في $1/a$، كما توقعنا تمامًا. يلاحظ اختلاف الوضع في قانونَي الحذف للجمع والحذفِ للضرب عن القوانين المذكورة سابقًا — إنهما نتيجتان تمخَّضَتا عن القوانين السابقة، أكثرَ منهما قانونَين قُدِّما ببساطةٍ للحصول على لعبةٍ جيدة.

إذا أردنا إضافةَ كسرَين، مثل $2/5$ و$3/7$، فإن الطريقة المعتادة أن نضعَ لهما مَقامًا مشتركًا، على النحو التالي:

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{14}{35} + \frac{15}{35} = \frac{29}{35}$$

يمكن التحقُّق من هذه الطريقة، وغيرِها، باستخدام القوانين الجديدة التي ذكَرناها أعلاه. على سبيل المثال،

$$35 \times \frac{14}{35} = 35 \left(14 \times \frac{1}{35}\right) = (35 \times 14) \times \frac{1}{35} = (14 \times 35) \times \frac{1}{35}$$
$$= 14 \times \left(35 \times \frac{1}{35}\right) = 14 \times 1 = 14,$$

وكذلك

$$35 \times \frac{2}{5} = (5 \times 7) \times \left(2 \times \frac{1}{5}\right) = (7 \times 5) \times \left(\frac{1}{5} \times 2\right)$$
$$= \left(7 \times \left(5 \times \frac{1}{5}\right)\right) \times 2 = (7 \times 1) \times 2 = 7 \times 2 = 14.$$

ومِن ثمَّ، فإنه باستخدام قانونِ الحذف للضرب، يكون $2/5$ و$14/35$ متساويَين، كما افترضنا في العملية الحسابية.

وبالمثل، يمكننا التحققُ من الحقائق الشائعة حول الأعدادِ السالبة. وسوف أترك للقارئ أن يستنتجَ من القوانين أن $1 = (-1) \times (-1)$، وهو استنتاج مُشابه تمامًا للبرهان الذي يُثبت أن $0 = 0 \times 0$.

لماذا يبدو لكثيرٍ من الناس أن الأعداد السالبة أقلُّ واقعيةً من الأعداد الموجبة؟ ربما لأن عدَّ مجموعاتٍ صغيرة من الأشياء يعدُّ نشاطًا أساسيًّا بين الناس، وعند عملِه لا يتطلَّب الأمرُ استخدام الأعداد السالبة. لكن، هذا كلُّه يعني أن نظام الأعداد الطبيعية، باعتباره نموذجًا، يكون مفيدًا في حالاتٍ مُعيَّنة، ولكن النظام الموسَّع للأعداد ليس كذلك. فإذا أردنا أن نُفكِّر في درجات الحرارة أو التواريخ أو الحسابات البنكية، فإن الأعداد السالبة تُصبح مفيدة فعلًا. وما دام النظام العدديُّ الموسَّع متَّسقًا منطقيًّا، فلا يوجد ضررٌ من استعماله نموذجًا.

ربما يبدو غريبًا أن نُسمِّيَ نظام الأعداد الطبيعية نموذجًا. ألسْنا نُجري عمليةَ عَدٍّ فِعليًّا، دون أيِّ تمثيل بعينه؟ نحن فعلًا نفعل ذلك، لكن هذا الإجراء ليس دائمًا مناسبًا أو حتى مُمكنًا. فليس هناك خطأٌ في العدد 13948402759364986492349878 من وجهة النظر الرياضية، ولكن إذا لم نستطع عَدَّ الأصواتِ في فلوريدا فإنه من غير المتصوَّر أن

نتأكد في أيِّ وقتٍ أنَّ لدَينا تجمُّعًا من 1394840275936498649234987 عنصرًا. وإذا أخذتَ كومتَين من أوراق الشجر، وجمَعتَهما مع كومةٍ ثالثة، فإن الناتج لا يكون ثلاثَ كوماتٍ من الأوراق، ولكن كومة كبيرة واحدة. وإذا راقبتَ عاصفةً ممطرة، فإن الإجابة الصحيحة عن السؤال كما قال فيتجنشتاين: «كم قَطْرةَ مطرٍ رأيت؟» ستكون: «كثيرًا»، وليس أنَّ هناك عددًا يُحصيها لكنك لا تعرفه.

(٦) الأعداد الحقيقية والمركبة

يتكوَّن نظام الأعداد الحقيقية من جميع الأعداد التي يمكن تمثيلُها بكسورٍ عشريةٍ غيرِ منتهية. هذا المفهوم أكثرُ تعقيدًا مما يبدو؛ لأسبابٍ ستُشرَح في الفصل الرابع. أما الآن، فدعني أقُلْ لك إن سبب توسيع نظام الأعداد من الأعداد النسبية إلى الأعداد الحقيقية مماثلٌ لسببِ تقديمنا للأعداد السالبة والكسور؛ إنها تُمكِّننا من حلِّ مُعادلاتٍ لا يمكن حلُّها بدونها.

وأكثرُ الأمثلة شهرةً على ذلك هي المعادلة $x^2 = 2$. في القرن السادس قبل الميلاد اكتشفَت مدرسةُ فيثاغورس أن $\sqrt{2}$ عدد غير نِسبي، وهذا يعني أننا لا نستطيع تمثيلَه بكسر. (سنستعرض برهانًا يُثبت ذلك في الفصل التالي). وقد تَسبَّب هذا الاكتشافُ في كثيرٍ من الاستياء عند طرحه، لكننا الآن نتَّفق على ضرورة توسيع نظام الأعداد إذا أَرَدْنا نَمْذَجةَ أشياء مثل طول قُطر المربَّع. ومرةً أخرى، فإن الطريقة المجردة تجعل مُهمَّتنا سهلةً جدًّا. نتناول هنا رمزًا جديدًا وهو $\sqrt{2}$، ولدَينا قاعدةٌ واحدة تُخبرنا ماذا نفعل به: إنَّ تربيعَه يساوي 2

إذا تدرَّبت بما يكفي، فإنك ستعترض على ما قُلته توًّا، على أساس أن القاعدة لا تُفرِّق بين $\sqrt{2}$ و$-\sqrt{2}$. إحدى الطرق للتعامُل مع هذه المسألة هي أن نتناول مفهومًا جديدًا في نظام الأعداد، وهو الترتيب. من المفيد غالبًا أن نتحدَّث عن عددٍ بأنه أكبرُ من عددٍ آخَر، وإذا سمَحْنا لأنفسنا بهذا فإنه يُمكننا تمييزُ $\sqrt{2}$ بخاصية إضافية وهي أنَّ $\sqrt{2}$ أكبر من صفر. ولكن حتى بدون هذه الخاصية، فإنه يُمكننا إجراءُ عملياتٍ حسابية مثل:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1,$$

وبالفعل توجد مَيزةٌ في عدم التمييز بين $\sqrt{2}$ و$-\sqrt{2}$، وهي أننا نعلم أن العمليةَ الحسابية السابقة تتحقَّق لكِلا العددَين.

وتاريخيًّا، تركَ الشكُّ في الطريقة المجرَّدة آثارَه في الكلمات التي تصف الأعدادَ الجديدة التي نتَجَت في كل مرة وُسِّع فيها نظامُ الأعداد، مثل كلمتَي «سالب» و«غير نِسبي». لكن توجد كلماتٌ أصعبُ فهمًا بكثير منها مثل «الأعداد التخيُّلية» أو «الأعداد المركَّبة»، أي الأعداد التي على الصورة $a + bi$، حيث a وb أعدادٌ حقيقية، وi هو الجذر التربيعي للعدد -1.

ومن وجهة نظر مادية، يمكننا سريعًا أن نُنحي الجذر التربيعيَّ للعدد -1 جانبًا؛ بما أن مربع أيِّ عددٍ يكون موجبًا، فإن -1 ليس له جذرٌ تربيعي، وهذا كلُّ ما في الأمر. ولكن، لا معنى لهذا الاعتراض إذا تبَنَّينا وجهة النظر المجرَّدة. لماذا لا نستمرُّ ببساطةٍ في توسيع نظامنا العدديِّ بتقديم حلٍّ للمعادلة $x^2 = -1$، ونُسمِّي الحلَّ i؟ لماذا يُفترض أن يُثير هذا الأمرُ اعتراضًا أكبرَ عمَّا حدث عندما طرَحْنا $\sqrt{2}$؟

ربما تكون إحدى الإجابات المتداولة أنَّ $\sqrt{2}$ له مفكوكٌ عَشري (من حيث المبدأ)، يمكن حسابُه إلى أيِّ درجةٍ منشودة من الدقة، في حين لا يُوجَد ما يُكافئ هذا القولَ بالنسبة إلى العدد i. ولكن جميع هذه الأقوال نعرفها مُقدمًا، أعني أن i عددٌ غيرُ حقيقي، تمامًا كما أن $\sqrt{2}$ عددٌ غيرُ نِسبي. ولا يعوقنا ذلك عن توسيع نظامنا العددي إلى نظامٍ يُتيح لنا إجراءَ عملياتٍ حسابية مثل:

$$\frac{1}{i-1} = \frac{i+1}{(i-1)(i+1)} = \frac{i+1}{i^2-i+i-1} = \frac{i+1}{-1-1} = -\frac{1}{2}(i+1)$$

الفرق الأساسي بين i و$\sqrt{2}$ هو أننا في حالة i مُضطرُّون أن نفكِّر بطريقةٍ مجردة، أمَّا في حالة $\sqrt{2}$ فهناك دائمًا مجالٌ للاختيار بين تمثيلٍ مادِّي مثل $1.4142\ldots$ أو طول قُطر مربع الوحدة. ولكي تعرف السبب في أن i ليس له تمثيلٌ كهذا، اطرح على نفسِك هذا السؤال: أيٌّ من الجذرَين التربيعيَّين بـ $\sqrt{2}$ هو i وأيُّهما $-i$؟ هذا السؤال ليس له معنًى؛ لأن الخاصية الوحيدةَ للعدد i هي أن مربَّعه -1. وبما أن $-i$ له الخاصيةُ نفسُها، فإن أيَّ جملة صحيحة عن i ستظلُّ صحيحةً إذا استبدلنا بها الجملةَ المُناظِرة عن $-i$. من الصعب إذا استوعبنا هذا أن نُولِيَ أيَّ اعتبار لِوجهة النظر التي ترى أن i ربما ترمز لشيءٍ أفلاطوني ذي وجودٍ مُستقل.

يتوازى ذلك مع مسألةٍ فلسفية شهيرة. هل يمكن أن يكون إحساسُك عند ملاحظتك اللونَ الأحمر هو ما أتصوَّرُه أنا عند ملاحظتي اللونَ الأخضر، والعكس صحيح؟ بعضُ الفلاسفة يتعاملون مع هذا السؤال على نحوٍ جِدِّي ويُعرِّفون «الكيفيات المحسوسة» بأنها خِبراتنا الذاتية المطلقة عندما نرى الألوان على سبيل المثال. بينما لا يعتقد الفلاسفةُ الآخَرون في الكيفيات المادية المحسوسة. ذلك أنهم يرَون أن كلمةً مِثل «أخضر» تُعرَّف بطريقةٍ أكثر تجريدًا بدَورها في نظامٍ لُغويٍّ ما؛ أي بعلاقاتها بمفاهيمَ مثل «عُشب»، «أحمر»، وهكذا. ومن غير الوارد استنتاج موقفِ شخصٍ ما من هذا المقال من طريقةِ كلامه عن اللون، باستثناء خلال المناقشات الفلسفيَّة. وبالمثل، فإن كلَّ ما يهمُّ عَمليًّا فيما يخصُّ الأعدادَ وغيرها من الكائنات الرياضية هو القوانين التي تتبعُها.

إذا قدَّمنا i للتوصُّل إلى حلٍّ للمعادلة $x^2 = -1$، فماذا عن معادلاتٍ أخرى مماثلةٍ مثل $x^4 = -1$، أو $2x^6 + 3x + 17 = 0$؟ من الجدير بالذكر أن كلَّ معادلةٍ من هاتَين المعادلتَين يمكن حلُّها في نظام الأعداد المركَّبة. بعبارةٍ أخرى، كان قَبول العدد i بمثابة استثمارٍ صغير، ولكننا دفَعْنا مقابلَ ذلك مراتٍ عديدة. تُعرَف هذه الحقيقة، التي لها تاريخٌ معقَّد لكنها تُنسَب عادةً إلى جاوس، باسم النظرية الأساسية في الجبر وهي تُمِدُّنا بدليلٍ مُقنِع تمامًا بوجود شيءٍ طبيعي حول العدد i. ربما لا يمكن تخيُّلُ سلةٍ مليئة بعدد i من التفاح، أو رحلةٍ بالسيارة تستغرق عدد i من الساعات، أو حسابٍ بنكي نسحبُ منه مبلغ i من الجنيهات. لكن نظام الأعداد المركبة أصبح لا غِنى عنه للرياضيِّين والعلماء والمهندسين — نظرية ميكانيكا الكَمِّ، مثلًا، تعتمد إلى حدٍّ كبير على الأعداد المركَّبة. وهي تُمدُّنا بواحدٍ من أحسَن التوضيحات للمبدأ العامِّ القائل بأنه: إذا كان تكوينٌ رياضي مجردٌ طبيعيًّا بدرجةٍ كافية، فمن المؤكَّد غالبًا أن يُستخدَم نموذجًا.

(٧) لمحةٌ مبدئية عن اللانهاية

بمجرد أن يتعلَّم المرءُ التفكيرَ بطريقةٍ مجردة، فإنه يكون مُبتهجًا، وهي بهجةٌ تُشبه إلى حدٍّ ما بهجتَه عندما يتمكَّن فجأةً من ركوب الدراجة دون القلق بشأن الحفاظِ على توازُنِه. ولكني لا أريد إعطاءَ انطباعٍ بأن الطريقة المجردة شأنها شأن ترخيصٍ لطباعة النقود. من المهمِّ مُضاهاة تقديم العدد i في نظام الأعداد بما حدَث عند محاولة تقديم العدد ما لا نهاية. في البداية، يبدو أنه ليس هناك ما يوقفنا؛ فمن المفترض أن ما لا نهاية

تَعني شيئًا مثلَ قِسمة 1 على صفر، فلِمَ لا يكون ∞ رمزًا مجردًا ونعتبره حلًّا للمعادلة $0x = 1$؟

تظهر مشكلةُ هذه الفكرة بمجردِ محاولة إجراءِ عمليةٍ حسابيةٍ ما. فيما يلي، على سبيل المثال، نتيجةٌ بسيطة لقانون التجميع (الدمج) للضرب، وحقيقة أن $0 = 2 \times 0$.

$$1 = \infty \times 0 = \infty \times (0 \times 2) = (\infty \times 0) \times 2 = 1 \times 2 = 2$$

يوضح هذا أنَّ وجود حلٍّ للمعادلة $0x = 1$ يؤدِّي إلى عدمِ اتِّساق. هل هذا يعني أن اللانهاية غيرُ موجودة؟ لا، هذا يعني ببساطة أنه لا تُوجَد فكرةٌ طبيعية عن اللانهاية تتَّسق مع قوانين الحساب. ومن المفيد أحيانًا توسيعُ نظام الأعداد بحيث يشمل رمزَ ∞، مع قَبول أنه في النظام الموسَّع للأعداد قد لا تتحقَّق هذه القوانينُ دائمًا. ومع ذلك، عادةً ما نُفضِّل الحفاظَ على القوانين، ونستخدِمها دون اللانهاية.

(٨) رفع الأعداد لقُوًى سالبةٍ وكسريَّة

من أعظم فوائد الطريقة المجردة أنها تسمح لنا بإسباغ معنًى على المفاهيم المألوفة في المواقف غير المألوفة. ومن المناسِب هنا اختيارُ عبارة «إسباغ معنًى» حيث إن هذا ما نفعله ببساطة، وليس اكتشاف معنًى موجودٍ من قبل. ومثالٌ بسيط على ذلك الطريقة التي نوسِّع بها مفهومَ رفعِ عددٍ إلى قوة.

إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإن a^n يعني ناتجَ حاصل ضرب a في نفسها بعددِ n من المرات. على سبيل المثال، $125 = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$ و$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$. لكن مع هذا التعريف ليس من السهل تفسيرُ جملةٍ مثل $2^{3/2}$؛ لأنك لا تستطيع أن تأخذ 1.5 وتضربَها معًا. فما الطريقةُ المجردة للتعامُل مع هذه المسألة؟ مرةً أخرى، ليس المطلوبُ النظرَ إلى المعنى الجوهريِّ — في حالةِ تعبيراتٍ مثل a^n — وإنما المطلوب هو التفكير في القوانين.

وفيما يلي القانونان الأساسيَّان لرفعِ الأعداد إلى قُوًى:

القانون الأول: $a^1 = a$ لأيِّ عدد حقيقي a.

القانون الثاني: $a^{m+n} = a^m \times a^n$ لأي عدد حقيقي a وأيِّ زوجَين من الأعداد الطبيعية m وn.

على سبيل المثال، $2^2 \times 2^3 = 2^5$ حيث 2^5 تعني $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$، و$2^2 \times 2^3$ تعني $(2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$. وهما العدد نفسُه؛ لأن الضرب هنا تمَّ تبعًا لخاصية التجميع (الدمج).

من هذَين القانونَين، يُمكننا بسرعةٍ استعادةُ الحقائق التي نعرفها. على سبيل المثال، $a^2 = a^{1+1}$، التي هي طبقًا للقانون الثاني نفسُها $a^1 \times a^1$. وطبقًا للقانون الأول فهذه هي $a \times a$، كما يفترض أن تكون. لكننا الآن في وضعٍ يُمكننا فيه عملُ أكثرَ من ذلك. دعْنا نكتب x للعدد $2^{3/2}$. إذن، $x \times x = 2^{3/2} \times 2^{3/2}$، وهو طبقًا للقانون الثاني يُساوي $2^{3/2+3/2} = 2^3 = 8$. بعبارةٍ أخرى $x^2 = 8$. وهذا لا يُحدد x تمامًا، بما أن العدد 8 له جذران تربيعيَّان، فمن المعتاد تَبنِّي النهج التالي.

القانون الثالث: إذا كان $a > 0$ وb عددٌ حقيقي، فإن a^b عدد موجب.

باستخدام القانون الثالث كذلك، نجد أن $2^{3/2}$ هو الجذرُ التربيعيُّ الموجَب للعدد 8.

ليس هذا اكتشافًا «للقيمة الحقيقية» للعدد $2^{3/2}$. ومع ذلك، لا يُقدم أيٌّ منهما التفسيرَ الذي أعطيناه للتعبير $2^{3/2}$ اختياريًّا — بل إنه فقط الإمكانيةُ الوحيدة إذا أردنا الاحتفاظ بهذه القوانين الثلاثة. يتيح لنا برهانٌ مماثلٌ تفسيرَ مفهومِ a^0، على الأقل عندما لا تكون a صفرًا. طبقًا للقانونَين الأول والثاني، نعلم أن $a \times a^0 = a^1 \times a^0 = a^{1+0} = a^1 = a$. ومن ثمَّ، يقتضي قانونُ الحذف أن $a^0 = 1$، أيًّا كانت قيمة a. أما فيما يتعلق بالقُوى السالبة، إذا عرَفنا قيمة a^b، فإن $a^b \times a^{-b} = a^{b+(-b)} = a^0 = 1$، التي تستتبع أن $a^{-b} = 1/a^b$. العدد $2^{-3/2}$، على سبيل المثال، هو $1/\sqrt{8}$.

ثَمة مفهومٌ آخر يُصبح أبسطَ عندما ننظر إليه بالطريقة المجردة، وهو مفهوم اللوغاريتم. ليس لديَّ الكثيرُ لقولِه عن اللوغاريتمات في هذا الكتاب، لكن إذا كان الأمر يقع في دائرة اهتمامك، فربما يروق لك أن تعلم أن كلَّ ما تحتاج إليه لاستخدام اللوغاريتمات هو القواعد الثلاث الآتية. (إذا أردتَ اللوغاريتم للأساس e بدلًا من 10، فيمكنك استبدال e بالعدد 10 في القاعدة الأولى.)

القاعدة الأولى: $\log(10) = 1$

القاعدة الثانية: $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

القاعدة الثالثة: إذا xy، فإن $\log(x)y$.

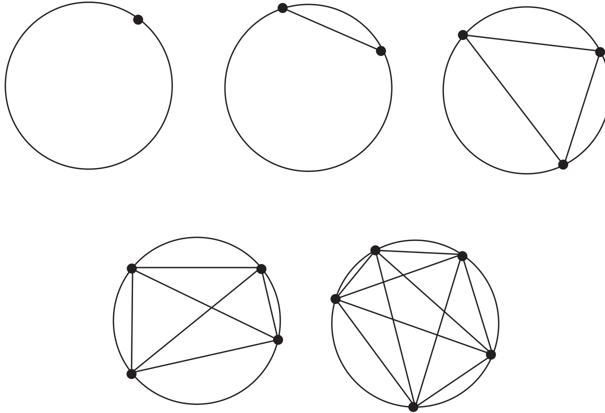
على سبيل المثال، لنرَ أن log (30) أقلُّ من 3/2، لاحِظْ أن + log (10) = log (1000) = log (10) + log (10) + log (10) = 3، طبقًا للقاعدتَين الأولى والثانية. ولكن log (900) = log (30) + log (30) = 2 log (30)، طبقًا للقاعدة الثانية، وlog (900) طبقًا للقاعدة الثالثة. وعليه، فإنَّ 3(30) log 2؛ ولذا 3/2(30) log.

سوف أناقش عددًا من المفاهيم ذات الطبيعة المماثلة في جزءٍ لاحقٍ من الكتاب. تبدو هذه المفاهيمُ ضَربًا من الغموض إذا حاولتَ أن تفهمها فَهمًا ملموسًا، لكنها تفقد غُموضها إذا استرخيتَ، ولم تعبَأْ بماهيَّتِها، واستخدمتَ الطريقةَ المجردة في التفكير.

الفصل الثالث

البراهين

يوضِّح الشكلُ أدناه خمسَ دوائر؛ الأولى منها لها نقطةٌ واحدة على مُحيطها، والثانية لها نقطتان على المحيط، وهكذا. وقد رُسِمَت كلُّ الخطوط الممكنةِ للوصل بين هذه النقاط، وقَسمَت هذه الخطوطُ الدوائرَ إلى أجزاء. إذا عدَدْنا الأجزاءَ في كل دائرةٍ حصَلْنا على المتتابِعة $1, 2, 4, 8, 16$. يمكن فَهمُ هذه المتتابعة فورًا: يبدو أن عدد الأجزاء يتضاعف كلَّ مرةٍ عند إضافةِ نقطةٍ جديدة على مُحيط الدائرة؛ أي إن عددَ x من النقاط ينتُج عنه 2^{n-1} من الأجزاء، على الأقل إذا لم تلتقِ ثلاثةُ خطوطٍ في نقطة.



شكل ٣-١: تقسيم دائرةٍ إلى أجزاء

ومع ذلك، نادرًا ما يقتنع علماءُ الرياضيات بعبارةِ «يبدو أن». وبدلًا من ذلك، فإنهم يطلبون برهانًا؛ أي: إثباتًا يجعل الجملة الرياضيَّة تتجاوز كلَّ الشكوك الممكنة. ماذا

يعني ذلك؟ على الرغم من أن المرء يستطيع غالبًا إثباتَ صحةِ جملةٍ رياضية على نحوٍ يتجاوز كلَّ الشكوك المعقولة، فلا شك أنه سيكون ضَربًا من المبالغة الزعمُ بأنَّ برهانًا ما لا يترك مجالًا للشكِّ مهما كان. يمكن للمؤرخين تقديمُ العديد من الأمثلة على جُملٍ وعبارات، بعضُها رياضية، كان يُظَن يومًا أنها لا يَرقى إليها الشكُّ، ولكن تبيَّن فيما بعدُ أنها غيرُ صحيحة. فلماذا يُفترَض في النظريات الرياضية اليومَ أن تكون استثناءً في ذلك على أيِّ نحو؟ سأُجيب عن هذا السؤال بإعطاء أمثلةٍ لبراهين، وأستخلصُ منها بعض الاستنتاجات العامة.

(١) عدم نسبيَّةِ الجذر التربيعي للعدد 2

كما ذكرنا في الفصل الأخير، يُقال عن عددٍ إنه نسبيٌّ إذا أمكَن كتابتُه على شكلِ كسر p/q، حيث p وq عددان صحيحان. ويُقال إنه غيرُ نِسبي إذا لم يمكن ذلك. أحدُ أشهر البراهين في الرياضيات يُثبت أن $\sqrt{2}$ عددٌ غير نِسبي. وهو يشرح تِقنيةً معروفة بأنها البرهانُ بالتناقُض، أو البرهان بنَقْضِ الفَرض.

يُستهَلُّ البرهان من هذا النوع بافتراض أن النتيجة المطلوب إثباتُها غيرُ صحيحة. ربما تبدو هذه طريقةً غريبة لتقديم البرهان، لكننا في الحقيقة نَستخدِمُ غالبًا التقنية نفسَها في المحادثة اليومية. إذا ذهبتَ إلى قسم الشرطة لتقديم بلاغٍ بأنك رأيتَ عرَبةً محطَّمة عمدًا، واتُّهِمتَ بأنك أنت مرتكبُ هذا الفِعل، فإنك ربما تقول «إذا كنتُ أنا الفاعل، فما كنتُ لِأَلفِت الانتباهَ إليَّ على هذا النحو». وعندئذٍ، ستتبنَّى مؤقتًا الفرضيَّةَ (غيرَ الصحيحة) بأنك أنت الفاعل؛ لإثباتِ مدى سخفِ هذه الفرضية وعدم منطقيَّتها.

سنحاول البرهنةَ على أن $\sqrt{2}$ عددٌ غير نِسبي؛ ولذا دَعْنا نفترض أنه نِسبي، ونحاول إثباتَ أن هذا الافتراض يؤدي إلى نتائجَ غيرِ معقولة. سأكتب البرهان في صورةِ سلسلةٍ من الخطوات، مع إعطاء تفاصيلَ أكثر ربما تتجاوز ما يحتاج إليه القُرَّاء.

(١) إذا كان $\sqrt{2}$ عددًا نسبيًّا، فيمكننا إيجاد العددَين الصحيحَين p وq بحيث يكون $\sqrt{2} = p/q$ (طبقًا لتعريف كلمة «نِسبي»).

(٢) أي كسر p/q يكون مُساويًا لكسرٍ ما r/s بحيث لا يكون r وs عددَين زوجيَّين. (استمر فقط في قسمة كلٍّ من بَسطِ الكسر ومقامه على 2 حتى يُصبح أحدُهما على الأقل عددًا فرديًّا. على سبيل المثال، الكسر 1412/1000 يساوي 706/500 يساوي 353/250.)

(٣) وبذلك، إذا كان $\sqrt{2}$ عددًا نسبيًّا، فيُمكننا إيجاد العددَين الصحيحَين r وs، كلاهما ليس عددًا زوجيًّا، بحيث $\sqrt{2} = r/s$.

(٤) إذا كان $\sqrt{2} = r/s$، فإن $2 = r^2/s^2$ (بتربيعِ كِلا طرَفَي المعادلة).

(٥) إذا كان $2 = r^2/s^2$، فإن $2s^2 = r^2$ (بضرب كِلا الطرفَين في s^2).

(٦) إذا كان $2s^2 = r^2$، فإن r^2 عدد زوجي، وهو ما يعني أن r لا بدَّ أن يكون عددًا زوجيًّا.

(٧) إذا كان r عددًا زوجيًّا، فإن $r = 2t$ لعددٍ صحيح ما t (طبقًا لتعريف كلمة «زوجي»).

(٨) إذا كان $2s^2 = r^2$ و$r = 2t$، فإن $2s^2 = (2t)^2 = 4t^{2t}$، وهو ما يترتَّب عليه أن $s^2 = 2t^2$ (بقسمةِ كِلا الطرفَين على 2).

(٩) إذا كان $s^2 = 2t^2$، فإن s^2 عدد زوجي، وهو ما يعني أن s عددٌ زوجي.

(١٠) بافتراضِ أن $\sqrt{2}$ عددٌ نِسبي، أثبتنا أن $\sqrt{2} = r/s$، بحيث لا يكون r وs عددَين زوجيَّين (الخطوة ٣). ولكننا أثبتنا أن r عدد زوجي (الخطوة ٦) وأن s عددٌ زوجي (الخطوة ٩). وهذا تناقُض واضح. وبما أن افتراض أن $\sqrt{2}$ عددٌ نِسبي له تترتب عليه نتائجُ من الواضح أنها غير صحيحة، فلا بد أن الافتراض نفسه غير صحيح. وعليه، فإن $\sqrt{2}$ عددٌ غير نِسبي.

لقد حاولتُ أن أجعل كلَّ خطوةٍ أعلاه صحيحةً على نحوٍ واضح بحيث يكون الاستنتاج النهائي بديهيًّا لا يقبل الجدل. ولكن، هل لم أترك حقًّا أيَّ مجالٍ للشك؟ إذا قدَّم لك أحدُهم عرضًا بالحصول على عشرة آلاف جنيه شريطةَ أن تفقد حياتَك في حال اكتشاف عددَين صحيحَين مُوجبَين p وq يُحققان العلاقة $p^2 = 2q^2$، فهل ستقبل هذا العرض؟ وفي حال قَبِلتَه، هل سيُخالجك شيءٌ من القلق؟

تتضمَّن الخطوة ٦ تأكيدًا بأنه إذا كان r^2 عددًا زوجيًّا، فلا بد أن r عدد زوجي. ويبدو هذا واضحًا إلى حدٍّ ما (حاصل ضرب عددٍ فردي في عددٍ فردي يكون عددًا فرديًّا أيضًا)، ولكن ربما كان في مقدورنا أن نفعل ذلك بتوضيحٍ أكبرَ إذا كنَّا نُحاول أن نُثبت بـ «تأكيدٍ مُطلَق» أن $\sqrt{2}$ عدد غير نِسبي. ولنُقسِّم الخطوة ٦ إلى خمس خطواتٍ فرعية:

(٦–أ) r عدد صحيح وr^2 عدد زوجي. نريد إثبات أن r لا بد أن يكون أيضًا عددًا زوجيًّا. دعْنا نفترضْ أن r عدد فردي ونبحث عن تناقض.

(٦–ب) بما أن r عددٌ فردي، يُوجَد عددٌ صحيح t بحيث $r = 2t + 1$.

(٦-ج) بِناءً على ذلك، فإن $r^2 = (2t + 1)^2 = 4t^2 + 4t + 1$.

(٦-د) لكن $4t^2 + 4t + 1 = 2\left(2t^2 + 2t\right) + 1$، الذي هو عدد فردي، وهو ما يتناقض مع حقيقة أن r^2 عدد زوجي.

(٦-هـ) وعليه، فإن r عددٌ زوجي.

هل هذا يجعل الخطوة ٦ الآن مُحكَمةً تمامًا لا جدالَ فيها؟ ربما لا، لأن الخطوة الفرعية (٦-ب) تحتاج إلى تفسير. وفي النهاية، فإن تعريف العدد الفرديِّ هو ببساطةٍ أنه عددٌ صحيح ليس من مُضاعَفات العدد 2. لماذا يجب أن يكون كلُّ عددٍ صحيح إمَّا مُضاعفًا للعدد 2 أو يساوي أحدَ مضاعفات العدد 2 مُضافًا إليه واحد؟ فيما يلي برهانٌ يُثبت ذلك.

(٦-ب-١) لِنقُل إن عددًا صحيحًا r يكون صالحًا إذا كان مضاعفًا للعدد 2 أو يساوي أحدَ مضاعفات العدد 2 زائد 1. إذا كان r صالحًا، فإن $r = 2s$ أو $r = 2s + 1$، حيث s هو أيضًا عددٌ صحيح. إذا كان $r = 2s$، فإن $r + 1 = 2s + 1$، وإذا كان $r = 2s + 1$، فإن $r + 1 = 2s + 2 = 2(s + 1)$. وفي كلتا الحالتَين، يكون $r + 1$ صالحًا كذلك.

(٦-ب-٢) العدد 1 صالح، بما أن $0 = 2\times0$ هو أحد مضاعفات العدد 2 و$1 = 0+1$.

(٦-ب-٣) بتطبيق الخطوة (٦-ب-١) مِرارًا وتَكرارًا، يمكننا أن نستنتِج أن العدد 2 صالح، ومن ثمَّ فإن العدد 3 صالح، والعدد 4 صالح، وهكذا.

(٦-ب-٤) وعليه، فإن كل عددٍ صحيح موجب هو عددٌ صالح، وهو ما كنا بصدَدِ إثباتِه.

هل انتهينا الآن؟ ربما تكون الخطوةُ الأقلُّ إحكامًا هذه المرةَ هي الخطوةَ (٦-ب-٤)؛ وذلك بسبب العبارة الغامضة إلى حدٍّ ما «وهكذا» من الخطوة السابقة لها. توضح لنا الخطوة (٦-ب-٣) كيف نُبرهن على أن أيَّ عددٍ صحيح موجب n مُعطًى هو عددٌ صالح. المشكلة أننا على مدار هذا البرهان سيكون علينا العَدُّ من 1 إلى n، وهو ما يستغرق وقتًا طويلًا للغاية في حالِ كان n عددًا كبيرًا. ويزداد الوضع سوءًا إذا حاولنا إثباتَ أن كلَّ عددٍ موجب هو عدد صالح. ومِن ثمَّ، يبدو أن البرهان لن ينتهيَ أبدًا.

من الناحية الأخرى، بما أن الخطوات (٦-ب-١) إلى (٦-ب-٣) تُقدِّم لنا حقًّا وبوضوح طريقةً لإثبات أن أيَّ عددٍ مفرد n هو عدد صالح (بشرط أن يكون لدَينا متَّسَعٌ من الوقت)، فإن هذا الاعتراض يبدو غيرَ معقول. وعليه، فإنه من غير المعقول في واقع الأمر أن يتبنَّى علماءُ الرياضيات المبدأَ الآتيَ كحقيقةٍ مقرَّرة أو مُسلَّمةٍ بديهية.

لنفترضْ أنه لأيِّ عدد صحيح موجب n جملةٌ مرتبطة به $S(n)$. (في المثال الحالي، ترمز $S(n)$ إلى الجملة «n هو عدد صالح».) فإذا كانت $S(1)$ صحيحة، وإذا كانت صحةُ $S(n)$ تقتضي دائمًا صحةَ $S(n+1)$، فإن $S(n)$ صحيحةٌ لكل n.

يُعرَف هذا بمبدأ الاستقراء الرياضي، أو الاستقراء فقط للذين يعتادون استخدامَه. وبمفرداتٍ أقلَّ تخصُّصًا، فإنه ينصُّ على أنه إذا كان لديك قائمةٌ غير مُنتهية من الجمل الرياضية التي ترغب في إثباتها، فإن إحدى الطرق للقيام بذلك أن تُبرهن على أن الجملة الأولى صحيحة، وأن كلًّا منها يستلزم صحةَ الجملة التي تليها.

كما توضح الفقراتُ القليلة السابقة، فإنه يمكن تقسيم خطوات البرهان الرياضي إلى خطواتٍ فرعية أصغر؛ ومن ثمَّ أوضحَ صحةً. وهذه الخطوات يمكن تقسيمها بعد ذلك إلى خطواتٍ أصغر، وهكذا. وفي هذا الصدد، ما يُهم علماءَ الرياضيات بصفةٍ جوهرية هو حقيقةُ أن تصِل هذه العملية مع الوقت إلى نهاية. ومن حيث المبدأ، إذا استمررتَ في تقسيم الخطوات إلى خطواتٍ أصغر، فسوف ينتهي بك المطاف إلى برهانٍ طويل جدًّا، يبدأ بمُسلَّمات مقبولةٍ عالميًّا، وتَخلُص إلى الاستنتاج المنشود عن طريق القواعد المنطقية الأساسية للغاية (مثل «إذا تحقَّق A، وA يشترط B، فإن B يتحقق»).

إنَّ ما قلتُه في الفقرة السابقة أبعدُ ما يكون عن الوضوح: في الواقع إنه كان أحد الاكتشافات الكبرى في مطلع القرن العشرين، ويرجع بدرجةٍ كبيرة إلى كلٍّ من فريجه وراسل ووايتهيد (راجع جزء «قراءات إضافية»). هذا الاكتشاف كان له عميقُ الأثر في الرياضيات؛ لأنه يعني إمكانيةَ حَسم أيِّ خلافٍ حول صحة أي برهانٍ رياضي. في القرن التاسع عشر، على النقيض من ذلك، كان يُوجَد اعتراضاتٌ حقيقية حول مسائلَ رياضيةٍ جوهرية. على سبيل المثال، اخترع جورج كانتور مؤسِّس نظرية المجموعات الحديثة براهينَ تعتمِد على فكرةِ أن مجموعةً غير مُنتهية يمكن أن تكون «أكبر» من أخرى. هذه البراهين مُتفَق عليها الآن، لكنها أثارت كثيرًا من الشكِّ في وقتها. اليوم، إذا كان هناك خلافٌ على أن برهانًا ما صحيحٌ، فإما لأنه لم يُكتَب بتفاصيلَ كافية، وإما لأنه لم يُبْذل جهدٌ كافٍ لِفَهمه واختباره بعناية.

في الواقع، هذا لا يعني أن الاعتراضات لن تَحدث أبدًا. فعلى سبيل المثال، غالبًا ما يحدُث أن أحدَهم يُقدِّم برهانًا طويلًا جدًّا، غيرَ واضحٍ في بعض الأجزاء، ويتضمَّن كثيرًا من الأخطاء الصغيرة، لكنه غيرُ صحيح بطريقةٍ واضحة وجوهرية. وعادةً ما يستغرق

الأمرُ جهدًا هائلًا لإثباتِ ما إذا كان البرهانُ المطروح مُحكَمًا على نحوٍ قاطع. وحتى صاحب البرهان قد يُفضِّل عدمَ المجازفة لإثباتِ عدم صحته.

على الرغم من ذلك، فإن حقيقة أن الخلافات يمكن أن تُحَل «من حيث المبدأ» لا تجعل الرياضياتِ مُتفرِّدة. ولا يُوجَد مكافئٌ رياضي لعلماء الفلك الذين لا يزالون يعتقدون في نظريةِ استقرار الكون، أو لعلماء الأحياء الذين يتبنَّون باقتناعٍ شديد وجهاتِ نظرٍ مختلفةً جدًّا حول مقدارِ ما تم تفسيرُه بواسطة الانتخاب الطبيعي، أو الفلاسفة الذين يختلفون جَذريًّا حول العلاقة بين الوعي والعالم المادي، أو الاقتصاديِّين الذين يتبعون مدارسَ فكرية مُتعارِضة مثل ترشيد الإنفاق والاقتصادات الكينزية الجديدة.

من المهم أن نفهمَ العبارة السابقة «من حيث المبدأ». لا يُوجَد عالمُ رياضيات يُلقي بالًا لكتابةِ برهانٍ كامل التفاصيل — بمعنى أن يكتبه على صورةِ استنتاج من مُسلَّماتٍ أساسية مستخدمًا فقط الخطواتِ الأوضحَ على الإطلاق، والأسهلَ اختبارًا. وحتى لو كان هذا ممكنًا، فسيكون غيرَ ضروريٍّ تمامًا؛ فالأبحاث الرياضية مكتوبةٌ لقُراء على درجةٍ عالية من التدريب، ولا يحتاجون إلى أن يكون كل شيءٍ موضَّحًا بعباراتٍ لا التباسَ فيها. ومع ذلك، إذا قدَّم أحدُهم ادِّعاءً مُهمًّا، ووجد علماءُ الرياضيات الآخَرون أنه من الصعب تتبُّعُ البرهان، فإنهم سيطلبون إيضاحات، وستبدأ عندئذٍ عمليةُ تقسيم خطوات البرهان إلى خطواتٍ فرعية أصغر، وأسهلَ استيعابًا. وعادةً، لأن الحضور على درجةٍ عاليةٍ من التدريب، لن تستغرق هذه العملية وقتًا طويلًا حتى يُقدَّم التوضيح اللازم أو يتَّضح الخطأ. وعليه، فإن أي برهانٍ مزعوم يُقدم نتيجةً يهتمُّ لها علماءُ الرياضيات الآخَرون لا يكون مقبولًا غالبًا إلا إذا كان صحيحًا.

لم أتناول سؤالًا ربما يرِدُ على أذهان بعض القراء: لماذا يجب قَبولُ المسلَّمات التي اقترحها علماءُ الرياضيات؟ على سبيل المثال، إذا اعترض أحدهم على مبدأ الاستقراء الرياضي، فكيف نُقابل هذا الاعتراض؟ سوف يُعطي معظم الرياضيِّين هذه الإجابة. أولًا، يبدو المبدأُ صحيحًا على نحوٍ واضح لكلِّ مَنْ يفهمه تقريبًا. ثانيًا، ما يُهمُّ في نظامِ مُسلَّماتٍ ما هو اتساقُ المسلَّمات وفائدتُها أكثرَ من ماهيَّتها. وما يفعله أيُّ برهانٍ رياضي في واقع الأمر هو إثبات أن بعض الاستنتاجات، مثل عدم نسبية العدد $\sqrt{2}$، يأتي نتيجةَ مقدماتٍ منطقيةٍ معيَّنة مثل مبدأ الاستقراء الرياضي. وصحَّة هذه المُقدمات المنطقية هي موضوعٌ مُستقلٌّ تمامًا، يمكن أن يُترَك بأمانٍ إلى الفلاسفة.

(٢) عدم نسبية النسبة الذهبية

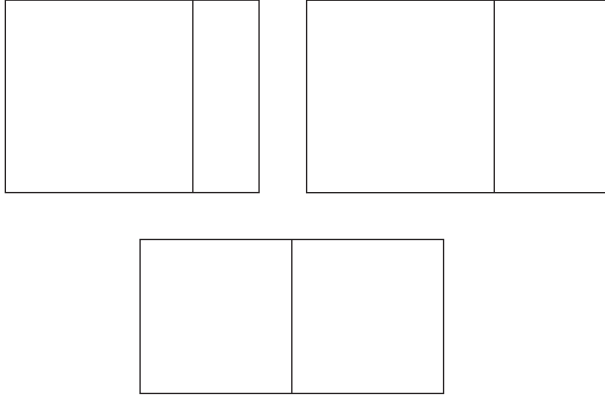
من الخبرات العامة لدارسي الرياضيات المتقدِّمة الوصولُ إلى نهاية البرهان، ثم التفكير في الجملة الآتية: «لقد فهمتُ تتابُعَ خطوات البرهان، لكنني بشكلٍ ما لا أستطيع الحكمَ على صحة النظرية، أو استخلاصَ رأيِ أيِّ شخصٍ في هذا البرهان.» عادةً ما نفترض في البرهان ما هو أكثرُ من مجرد ضمانِ صحته. ونشعر بعد قراءة برهانٍ جيدٍ أنه يُمِدُّنا بتوضيحٍ للنظرية، وأننا فهِمنا شيئًا لم نكن قد فهمناه سابقًا.

بما أن جزءًا كبيرًا من العقل البشري مُكرَّس لمعالجة البيانات المرئية، فمن غير المستغرب أن العديد من البراهين تستخدِم قدراتنا على التخيُّل. لتوضيح هذا، سأُعطي برهانًا آخرَ على عدم النسبية، ولكن هذه المرةَ عدم نسبية ما يُسمَّى بالنسبة الذهبية. والنسبة الذهبية هي عددٌ أثارَ اهتمامَ غيرِ الرياضيِّين (وبقدْرٍ أقل، اهتمام علماء الرياضيات) قرونًا. ويُقصَد به النسبةُ بين أطوال أضلاع المستطيل بما يُحقق الخاصية التالية: إذا اقتطعتَ مربعًا من هذا المستطيل، فإن الناتج هو مستطيلٌ أصغرُ مُماثل في شكله تمامًا للمُستطيل الأصلي، ولكن بعد دورانه. ينطبق هذا على المستطيل الثاني في شكل ٣-٢.

لماذا يُفترَض وجودُ هذه النسبة على أي حال؟ (علماء الرياضيات لديهم خبرةٌ في طرح هذا النوع من الأسئلة). إحدى الطرُق لإثبات وجودِ هذه النسبة هي أن نتخيَّل أنَّ لدَينا مستطيلًا صغيرًا مرسومًا عند ضلعِ مربعٍ ما، بحيث يُصبح المربع مستطيلًا أكبر. باديءَ بَدءٍ، لنتخيَّلْ أن المستطيل الصغير طولُه أكبرُ كثيرًا من عرضِه، بينما المستطيل الكبير ما زال أشبهَ بمُربع. إذا سمحنا للمستطيل الصغير أن يزداد عرضُه حتى يُصبح هو نفسُه مربعًا، فإن المستطيل الكبير سيُصبح طولُه ضِعفَ عرضِه. ومن ثمَّ، فإن المستطيل الصغير كان في البداية أقلَّ عرضًا بكثيرٍ من المستطيل الكبير، والآن أصبح أكبرَ عرضًا (بالنسبة إلى حجمه). وفي نقطةٍ ما بين هذين الوضعَين، يكون المستطيلان مُتماثِلَين في الشكل. يوضح شكل ٣-٢ هذه العملية.

ثمة طريقة أخرى لإثباتِ وجود النسبة الذهبية، وهي حسابُها. إذا سمَّيناها x وافترضنا أن طولَ ضلع المربع يساوي 1، فإن المستطيل الكبير يبلغ طولَا ضلعَيه 1 وx، بينما يبلغ طولا ضِلعَي المستطيل الصغير $x - 1$ و1. وإذا كانا مُتماثلَين في الشكل، فإن $x = x/1 = 1/(x - 1)$. وبضرب كِلا الطرفَين في $x - 1$ نستنتج أن $x\,(x - 1) = 1$، وعليه فإن $x^2 - x - 1 = 0$. وبحلِّ هذه المعادلة التربيعيَّة، مع الوضع في الاعتبار أن x

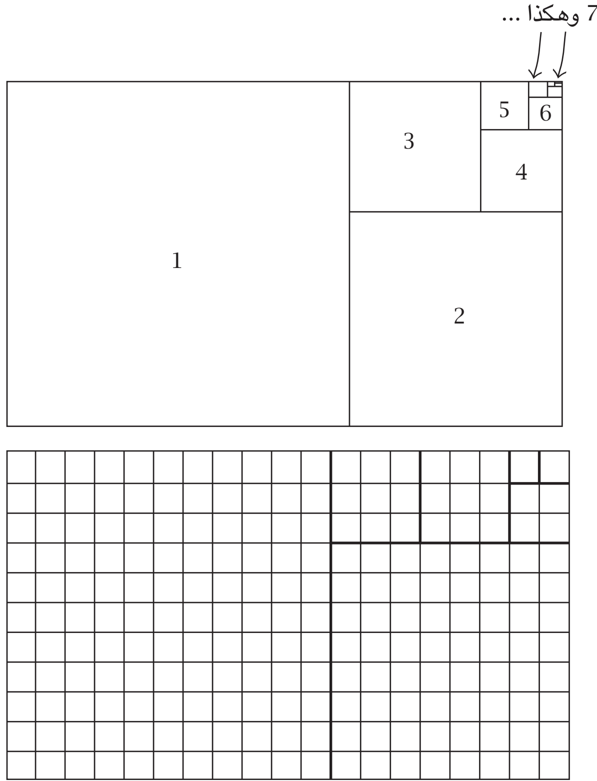
ليست عددًا سالبًا، فإننا نجد أن $x = (1 + \sqrt{5})/2$. (إذا كانت لديك خبرة جيدة في الرياضيات، أو استوعبتَ الفصل السابق استيعابًا تامًّا، فلربما تتساءل عن سببِ تَيقُّنِنا من وجود $\sqrt{5}$. في الواقع، ما يفعله هذا البرهان الثاني هو تحويل مسألةٍ هندسية إلى مسألةٍ جبرية مكافئة.)



شكل ٣-٢: وجود النسبة الذهبية

أما وقد أثبتنا أن النسبة x موجودة، فلنأخذ مُستطيلًا يبلُغ طولا ضلعَيه x و1 ونُفكِّر في العملية التالية. أولًا، نقتطع مربعًا من المستطيل، بحيث نحصل على مستطيلٍ أصغر، يكون طبقًا لتعريف النسبة الذهبية له نفس شكل المستطيل الأصلي. نُكرِّر هذه العملية مرارًا، فنحصل بذلك على سلسلةٍ من مستطيلاتٍ أصغر فأصغر، كلٌّ منها له نفس شكل المستطيل الذي يسبقُه، ومن ثَمَّ فكلٌّ منها له طولا ضلعَين يُحقِّقان النسبة الذهبية. ومن الواضح أنها عمليةٌ تستمر إلى ما لا نهاية (انظر المستطيل الأول شكل ٣-٣.)

والآن لنفعل الشيءَ نفسَه مع مستطيلٍ النِّسبةُ بين طولَي ضلعَيه هي p/q، حيث p وq عددان صحيحان. هذا يعني أن المستطيل له نفس شكل المستطيل الذي طول ضلعَيه p وq، ومن ثمَّ يمكن تقسيمُه إلى عدد $p \times q$ من المربَّعات الصغيرة، كما يتَّضِح في حالة المستطيل الثاني في شكل ٣-٣. ماذا لو أزلنا المربعاتِ الكبيرةَ من طرَف هذا المستطيل؟ إذا كان q أصغرَ من q، فسوف نُزيل مربعًا بُعداه $q \times q$ ونحصل في النهاية على مستطيلٍ



شكل ٣-٣: اقتطاع مربعاتٍ من مُستطيلات

بُعداه $q \times (p-q)$. نستطيع عندئذٍ أن نُزيل مربعًا آخر، وهكذا. هل يمكن أن تستمرَّ هذه العملية إلى الأبد؟ الإجابة لا؛ لأننا في كل مرةٍ نقتطع فيها مربعًا فإننا نُزيل عددًا صحيحًا من المربعات الصغيرة، وربما لا يُمكننا أن نفعل ذلك أكثرَ من عدد $p \times q$ من المرات؛ لأنه لا يُوجَد لدَينا سوى عدد $p \times q$ من المربعات الصغيرة لنبدأ به.

لقد أثبتنا بذلك الحقيقتَين الآتيتَين:

(١) إذا كانت النسبة بين ضِلعَي المستطيل هي النسبةَ الذهبية، فإنه يمكننا الاستمرارُ في اقتطاع مربعاتٍ إلى ما لا نهاية.

(٢) إذا كانت النسبة بين ضلعَي المستطيل هي p/q لزوجٍ ما من الأعداد الصحيحة p وq، فإننا لا نستطيع الاستمرار في اقتطاع مربعاتٍ إلى ما لا نهاية.

وعليه، فإن النسبة p/q ليست النسبةَ الذهبية، أيًّا كانت قيمتا p وq. بعبارةٍ أخرى، فإنَّ النسبة الذهبية ليست عددًا نسبيًّا.

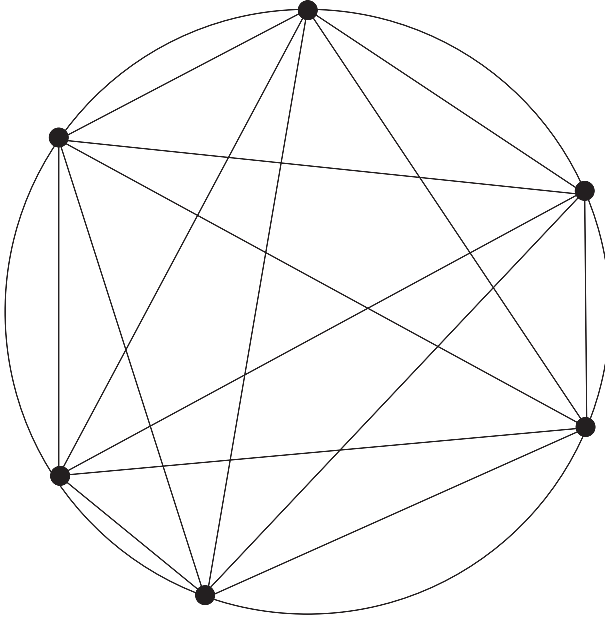
إذا أمعَنتَ التفكير في البرهان السابق، فسوف تُدرك في نهاية الأمر أنه لا يختلف عن برهانِ عدم نسبية $\sqrt{2}$ كما يبدو للوهلة الأولى. ولكن، طريقة تقديم البرهان مختلفةٌ بالتأكيد، وأكثر استحسانًا لكثير من الناس.

(٣) أجزاء الدائرة

الآن وقد تحدَّثنا عن طبيعة البرهان الرياضي، فلنرجع إلى المسألة التي بدَأنا بها هذا الفصل. لدينا دائرةٌ يُوجَد على مُحيطها عددُ n من النقاط، نصلُ كلَّ نقطتين منها بخطٍّ مستقيم، ونريد أن نُبرهِن على أن عدد الأجزاء المعرَّفة بهذه الخطوط المستقيمة يُساوي 2^{n-1}. وهذا يتحقق إذا كان n يساوي 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5. لإثبات هذه الفكرة عمومًا، علينا أن نجد سببًا مقنعًا لمضاعفة عددِ الأجزاء في كلِّ مرة نُضيف فيها نقطةً جديدة على المحيط. تُرى، ماذا عساه أن يكون هذا السبب؟

لا شيءَ يتبادر إلى الذهن على الفور، ومن ثمَّ ربما تكون إحدى الطرق التي يمكن البدءُ منها أن ندرس أشكالَ الدوائر المقسَّمة ونرى إن كان يُوجَد نمطٌ مُعيَّن يمكن تعميمُه. على سبيل المثال، بتعيين ثلاث نقاطٍ على محيط الدائرة يصبح لدَينا ثلاثةُ أجزاءٍ خارجيةٍ وجزءٌ مركزي. وبتعيينِ أربع نقاط، يُصبح لدَينا أربعة أجزاء خارجية، وأربعة أجزاء داخلية. وبتعيين خمسِ نقاط، يُصبح لدَينا شكلٌ خماسي في المركز وخمسةُ مثلثات بارزةٍ منه وخمسةُ مثلثاتٍ مُشتقَّة من النجمة الناتجة، وتجعله مرةً أخرى شكلًا خماسيًّا، وأخيرًا خمس مناطق خارجية. ولذا، يبدو طبيعيًّا أن نفكِّر في 4 على أنها 1 + 3، وفي 8 على أنها 4 + 4، وفي 16 على أنها 1 + 5 + 5 + 5.

هل ساعدك ذلك؟ يبدو أننا لم نحصل على أمثلةٍ كافية للخروج بنمطٍ واضح؛ ولهذا دعنا نرسُم الأجزاءَ الناتجة من ستِّ نقاط على محيط الدائرة. تظهر النتيجة في شكل ٣-٤. تُوجَد الآن ستةُ أجزاء خارجية. كلٌّ منها يلي جزءًا على شكل مثلَّث يُشير إلى الداخل. وبين كل جزأَين متجاورَين من هذا النوع، يُوجَد جزءان مُثلَّثان أصغَر. حتى الآن،



شكل ٣-٤: أجزاء الدائرة

$24 = 12 + 6 + 6$ جزءًا، ولم نحسب بعد عدد الأجزاء داخل الشكل السداسي في المركز. وهذه تنقسم إلى ثلاثة أجزاء على شكلٍ خماسي الأضلاع، وثلاثة أجزاء على شكلٍ رُباعي الأضلاع، ومثلث واحد في المركز. ومن ثم، يبدو من الطبيعي أن نفكِّر في عدد الأجزاء على النحو التالي: $1 + 3 + 3 + 12 + 6 + 6$.

ولكن، يبدو أنَّ هناك خطأً ما؛ لأن هذا يُعطينا 31 جزءًا. هل وقعنا في خطأٍ ما؟ على الأرجح، لا: المتتابعة الصحيحة هي $1, 2, 4, 8, 16, 31, 57, 99, 163$. وفي الواقع، لو أمْعنَّا التفكير قليلًا، يتضح لنا أن عدد الأجزاء لا يمكن أن يتضاعف في كل مرة. بدايةً، من الغريب أن يكون عددُ الأجزاء المعرَّفة عند عدم تعيين أي نقاطٍ على محيط الدائرة هو 1 بدلًا من $1/2$، وهو ما كان يُفترَض أن يكون عليه الوضع في حال مُضاعفة العدد عند تعيين النقطة الأولى. وعلى الرغم من هذا التضارُب الذي يحدث أحيانًا مع الصفر، فإن معظم علماء الرياضيات سيجدون أن هذه الحالة تحديدًا مُثيرةٌ للإزعاج. ومع ذلك، فثَمة

مشكلةٌ أهمُّ وهي أنه إذا كان n عددًا كبيرًا إلى حدٍّ ما، فمن البديهيِّ تمامًا أن يكون 2^{n-1} كبيرًا للغاية. على سبيل المثال، 2^{n-1} يُساوي $524,288$ عندما $n = 20$، و$536,870,912$ عندما $n = 30$. هل من المنطقيِّ تمامًا أن وجود 30 نقطة على محيط الدائرة سيُنتِج أكثر من 500 مليون جزءٍ مختلف؟ بالتأكيد لا. تخيَّل رسْمَ دائرة كبيرة في حقل، وتثبيتَ 30 وتدًا على محيطها على مسافاتٍ غير مُنتظمة، ثم ربْطَها بحبلٍ رفيع جدًّا. من المؤكَّد أن عدد الأجزاء الناتجة سيكون كبيرًا جدًّا، ولكنه لن يكون كبيرًا على نحوٍ لا يمكن تصوُّره. إذا كان قطر الدائرة يساوي 10 أمتار وقسَّمنا الدائرة إلى 500 مليون جزءٍ، فسيكون لدَينا في المتوسط ما يزيد عن 600 جزءٍ لكل سنتيمتر مربَّع. وكان لا بد أن يزيد سُمك الدائرة عن ذلك باستخدام الحبل، ولكن من الواضح أن هذا لن يتأتَّى مع وجود 30 نقطة فقط على مُحيطها.

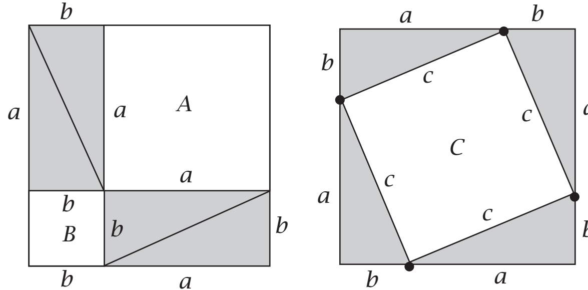
كما قلتُ سابقًا إن علماء الرياضيَّات يتحفَّظون على عباراتٍ مثل «من الواضح أن». ولكن في هذا المثال يمكن أن يَستندَ حَدْسُنا إلى حُجةٍ قوية، يمكن تلخيصُها على النحو الآتي. إذا قُسِّمَت الدائرة إلى عددٍ كبير من الأجزاء المتعدِّدة الأضلاع، فلا بد أنه سيُوجَد بين هذه الأجزاء عددٌ هائل من الأركان. وكلُّ ركن عبارةٌ عن نقطةٍ حيث يتقاطع جُزءان من الحبل، ويمكن أن نُثبِّت أربعة أوتاد لكلِّ موضع من هذه التقاطعات؛ أي المواضع التي تنتهي عندها أجزاءُ الحبل ذاتُ الصِّلة. يُوجَد 30 اختيارًا ممكنًا للوتد الأول، و29 للوتد الثاني، و28 للوتد الثالث، و27 للوتد الرابع. وهذا يعني أن عددَ الطرق التي يمكن بها اختيارُ الأوتاد الأربعة هو $30 \times 29 \times 28 \times 27 = 657720$، ولكن هذا معناه أننا لو اخترنا الأوتادَ الأربعة نفسَها بترتيبٍ مختلف، فإننا نحصل على التقاطعات نفسِها. تُوجَد $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ طريقة لوضعِ أيِّ أربعة أوتاد مُعطاة بالترتيب، وإذا أخذنا هذا الأمر في الاعتبار فإننا نجد أن عددَ التقاطعات هو $657720/24 = 27405$، وهو ما يفوق بكثيرٍ عددَ الأركان الناتجة عن $536,870,912$ جزءًا. (في الواقع، يتَّضح أن العدد الصحيح للأجزاء الناتجة عن تعيين 30 نقطة هو $27,841$.)

يحوي هذا المثالُ التحذيريُّ العديدَ من الدروس المهمَّة فيما يخصُّ تفسير الجُمَل الرياضية. وأوضحُ هذه الدروس أنك إذا لم تهتمَّ بإثباتِ صحَّة ما تقول، فإنك عُرضةٌ لقول شيءٍ غير صحيح. المغزى الأكثرُ إيجابيةً هو أنك إذا حاولتَ إثبات جملٍ ما، فستكون المحصِّلة أنك سوف تفهمها بطريقةٍ مختلفة تمامًا، وأكثر إمتاعًا بكثير.

(٤) نظرية فيثاغورس

تنصُّ نظرية فيثاغورس الشهيرة على أنه إذا كان للمثلث القائم الزاويةِ أطوالُ الأضلاع a وb وc، حيث c هو طول الوتر (الضلع المقابل للزاوية القائمة)، فإن $a^2 + b^2 = c^2$. لهذه النظرية العديد من البراهين، إلا أنه يتضح أنَّ برهانًا واحدًا تحديدًا قصيرٌ وسهل الفهم. في الواقع، كلُّ ما يحتاج إليه هو الشكلان التاليان:

في شكل ٣-٥، المربعات التي سَمَّيتُها A وB وC لها أضلاعٌ بالأطوال a وb وc على الترتيب، ومن ثمَّ مساحاتها كالتالي: a^2 وb^2 وc^2. ولأن تحريك المثلثات الأربعة لن يُغير مساحاتها، أو يجعلها تتداخل، فإن مساحة جزءِ المربع الأكبر الذي لا تُغطيه هو نفسُه في كِلا الشكلَين. لكن في الشكل الأيمن تبلغ هذه المساحة $a^2 + b^2$ وفي الشكل الأيسر تبلغ المساحة c^2.



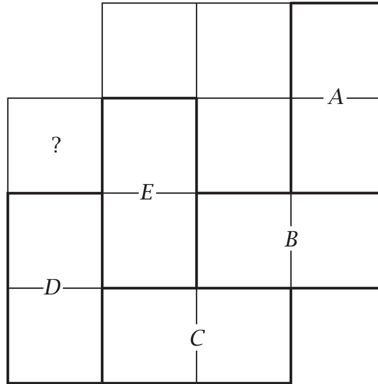
شكل ٣-٥: برهان مُوجز لنظرية فيثاغورس

(٥) تغطية شبَكةٍ من المربعات بإزالة الأركان

نتناول هنا إحدى الأُحجيات المعروفة. خُذْ شبكةً من المربعات بُعداها 8×8، وأَزِلِ المربعَين في ركنَين مُتقابلَين. هل يمكنك تغطيةُ باقي الشبكة بقِطَع على شكل حجر الدومينو، بحيث تُغطي كلٌّ منها مُربعَين مُتجاورَين بالكامل؟ يتَّضح من الشكل المعروض هنا (شكل ٣-٦) أن هذا غير مُمكن في حالة استبدال الشبكة التي بُعداها 8×8 بشبكة 4×4. افترض أنك قرَّرتَ وضع قطعةٍ في الموضع A. ستُلاحظ بسهولةٍ أنك مُضطرٌّ حينها أن تضَعَ قطعًا في المواضع B وC وD وE، بحيث يتبقى مربعٌ لا يمكن تغطيته. وبما أن

الركن الأيمن العُلوي يجب تغطيته بطريقةٍ ما، والطريقة الأخرى الوحيدة لذلك تؤدي إلى مشكلاتٍ مُشابهة (قياسًا على الوضع المماثل)، فإنه يستحيل تغطية الشكل بالكامل.

إذا استبدلنا 4 بـ 5، فستظل تغطية الشبكة مُستحيلة؛ لسببٍ بسيط وهو أن كلَّ قطعة تُغطي مربَّعَين، ولدَينا 23 مربعًا نريد تغطيتها، وهذا عددٌ فردي. ولكن، $8^2 - 2 = 62$ عددٌ زوجي، ومن ثمَّ لا يمكن استخدام هذا البرهان في حالةِ شبكةٍ بُعداها 8×8. ومن ناحية أخرى، إذا حاولتَ إيجاد برهانٍ مُشابه للبرهان الذي استخدمتُه لشبكةٍ بُعداها 4×4، فسوف تستسلم سريعًا؛ لأن عدد الاحتمالات الذي ينبغي أن تُفكِّر فيه كبيرٌ للغاية. إذن، كيف ينبغي مُعالجة المشكلة؟ إذا كنتَ لم تُصادف هذه المسألة من قبل، فإنني أستحثُّك على أن تحاول حَلَّها قبل مواصلة القراءة، أو أن تتخطَّى الفِقرة التالية؛ لأنك إذا نجحتَ في حل المسألة فإنك ستحصل على فكرةٍ جيدة عن متعة الرياضيات.



شكل ٣-٦: تغطية شبكة من المربعات بإزالة الأركان

لأولئك الذين تجاهلوا نصيحتي، وأعتقد بحُكم خبرتي أنهم أغلبية، إليكم كلمةً واحدة فقط، تُلخص تقريبًا البرهانَ الكامل: الشِّطْرنج. لوحُ الشطرنج عبارةٌ عن شبكة 8×8، مربعاتُها ملوَّنة بالتبادل بالأسود والأبيض (وهو تفصيلٌ لا داعيَ له فيما يخصُّ اللعبة، لكنه يجعل الأمر أكثرَ وضوحًا واستيعابًا). المربَّعان في الركنَين المتقابلَين لهما اللون نفسُه. إذا كانا باللون الأسود، حسبما يُحتمَل، فإن لوح الشطرنج الناتجَ سيتضمَّن 32 مربعًا باللون الأبيض و30 مربعًا باللون الأسود. كلُّ قطعةٍ من الدومينو تُغطي بالضبط

مربعًا واحدًا من كل لون، وبوضعِك 30 قطعةَ دومينو، فسيتبقَّى لديك في النهاية، أيًّا كانت الطريقةُ التي فعَلتَ بها ذلك، مربعان باللون الأبيض، وهذان المربعان لن تتمكَّن من تغطيتِهما.

هذه الحجة الموجَزة توضِّح جيدًا كيف أن البرهان يمكن أن يُقدم أكثرَ من مجردِ ضمان أن الجملة صحيحة. على سبيل المثال، لدينا الآن بُرهانان على أن الشبكة التي بُعداها 4×4 وأُزيلَ منها رُكنان متقابلان لا يمكن تغطيتها. أحدُهما البرهانُ الذي قدَّمتُه، والآخَر لوح الشطرنج الذي قدَّمتُه مثالًا على شبكة بُعداها 4×4. وكِلاهما يُثبت ما نريد، إلا أن البرهان الثانيَ تحديدًا يُقدِّم لنا سببًا على أن التغطية غيرُ ممكنة. ويخبرنا هذا السببُ أن تغطية شبكة بُعداها 1000×1000 مع إزالة ركنَين متقابلَين غيرُ ممكنةٍ كذلك. وعلى النقيض من ذلك، تخبرنا حُجةُ البرهان الأول بذلك في حالة الشبكة التي بُعداها 4×4 فحسب.

ما يميِّز الحجة الثانية أنها تعتمد على فكرةٍ واحدة، وهي وإنْ كانت غيرَ متوقعة، فإنها تبدو طبيعيةً جدًّا ما دام المرءُ قد فهمها. كثيرًا ما يتحيَّر الناس عندما يستخدم علماءُ الرياضيات كلماتٍ مثل «أنيق»، أو «جميل» أو حتى «ظريف» لوصفِ برهانٍ ما، إلا أن مثالًا كالسابق يعطي فكرةً عمَّا يَعنون بهذه الكلمات. يمكن الاستعانة بالموسيقى كتشبيهٍ مُفيد: ربما نستمتع تمامًا عند عزف مقطوعةٍ موسيقية بنغمةٍ توافقية غير متوقَّعة، ويبدو فيما بعدُ أنها مناسبة بدرجة مدهِشة، أو عندما يبدو نسيجُ الأوركسترا أكثرَ من مجرد مجموع آلاته، بطريقة لا يمكن فَهمُها فهمًا تامًا. يمكن للبراهين الرياضية أن تُمِدَّنا بمتعةٍ مماثلة من خلال ما تكشف عنه من تجلياتٍ مُفاجئة، وأفكار غير متوقَّعة ولكنها طبيعية، ومع تلميحاتٍ مثيرة بأنه لا يزال يُوجَد الكثير لاكتشافه. بالطبع، جمالُ الرياضيات ليس هو نفسه جمالَ الموسيقى، ولكن الجمال الموسيقي لا يتماثل كذلك مع جمالِ لوحةٍ فنِّية أو قصيدة أو حتى وجه إنسان.

(٦) ثلاثُ جُمَل تبدو واضحةً ولكنها تحتاجُ إلى براهين

من مظاهر الرياضيات المتقدِّمة، التي يجدها الكثيرون محيِّرة، أن بعض نظرياتها تبدو واضحة جدًّا، لا تحتاج إلى برهان. إزاء نظرية كهذه يسأل الناسُ كثيرًا: «إذا لم يعتبر ذلك واضحًا، فما الواضح إذن؟». زميل سابق لي لدَيه إجابةٌ جيدة لهذا السؤال، وهي

أن الجملة تكون واضحةً إذا تبادَر إلى الذِّهن على الفور برهانٌ يُثبت صحَّتها. في الجزء الباقي في هذا الفصل، سأعطي ثلاثة أمثلةٍ على جُمَل ربما تبدو واضحة، لكنها لا تجتاز هذا الاختبار.

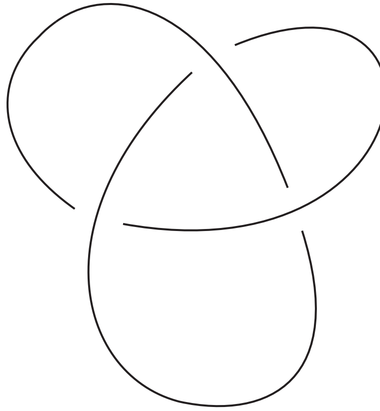
(١) تنصُّ النظرية الأساسية في الحساب على أن كلَّ عددٍ طبيعي يمكن كتابتُه بطريقة وحيدة كحاصل ضرب أعدادٍ أوَّلية، بصرف النظر عن الترتيب المكتوبة به. على سبيل المثال، $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$، و$74 = 2 \times 37$، و$101$ هو نفسُه عددٌ أوَّلي (ويُعتبر في هذا السياق «حاصل ضرب» عدد أولي واحد فقط). عند النظر في أعدادٍ صغيرة كهذا، سرعان ما يقتنع المرء بأنه لا تُوجَد أبدًا طريقتان مختلفتان لكتابة عددٍ كحاصل ضرب أعدادٍ أوَّلية. هذه هي الفكرة الأساسية في النظرية، ويبدو أنها لا تحتاج إلى برهان.

ولكن هل هي حقًّا على هذا القدْر الكبير من الوضوح؟ الأعداد 7 و13 و19 و37 و47 كلها أعدادٌ أولية، فإذا كانت النظرية الأساسية في الحساب واضحة، فإنه ينبغي أن يكون واضحًا أن $7 \times 13 \times 19$ لا يساوي 37×47. يمكن بالطبع التحقُّق من أن العددَين مختلفان حقًّا (أحدهما، طبقًا لما سيقوله أيُّ عالم رياضياتٍ، أهمُّ من الآخر)، لكن هذا لا يُثبِت بوضوحٍ أنهما مختلفان أو يشرح لماذا لا يمكن إيجادُ حاصلَي ضربِ آخرَين من الأعداد الأولية، يُعطيان النتيجة نفسَها هذه المرة. في الحقيقة لا يُوجَد برهان سهلٌ للنظرية: إذا تبادر برهانٌ إلى الذهن على الفور، فأنت تتمتَّع بعقلٍ غير عادي بالمرة.

(٢) افترِض أنك ربطتَ عُقدةً منزلقة في قطعة خيطٍ عادية، ثم لصقتَ النهايتَين معًا، بحيث تحصل على الرسم الموضَّح في شكل ٣-٧، المعروف للرياضيِّين بأنها العقدة الثلاثية الوُرَيقات. هل من الممكن فكُّ هذه العقدة دون قطع الخيط؟ لا، طبعًا لا يمكن.

لماذا، على الرغم من ذلك، نميل إلى أن نقول «بالطبع»؟ هل خطرَت لنا توًّا حُجة تؤيد ذلك؟ ربما — يبدو كما لو أن أي محاولةٍ لفك العُقدة تجعلها حتمًا تزيد من تشابكها وليس العكس. ولكن، من الصعب تحويلُ هذا الإحساس الغريزي إلى برهانٍ صحيح. من الواضح حقًّا أنه لا تُوجَد طريقةٌ سهلة لفكِّ العُقدة. ومن الصعب استبعادُ إمكانية وجود طريقةٍ لفكِّ هذه العقدة الثلاثية الوُرَيقات بجعلها أكثرَ تعقيدًا أولًا. ويبدو هذا باعترافِ الجميع أمرًا غيرَ وارد، ولكن تحدُث بالفعل ظواهرُ من هذا النوع في الرياضيات، بل حتى في الحياة اليومية: على سبيل المثال، لترتيبِ غرفةٍ جيدًا، يلزم غالبًا أن نبعثر محتوياتها ونجعلها أكثرَ فوضى أولًا، وذلك على عكس أن نضع كلَّ شيءٍ في خِزانته.

(٣) يعني مصطلح «منحنى» في المستوى أيَّ شيءٍ يمكنك رسمُه دون أن ترفع القلمَ عن الورقة. يُوصَف المنحنى بأنه بسيطٌ إذا كان لا يتقاطع مع نفسِه أبدًا، ومُغلقٌ إذا كان ينتهي حيثُ بدأ. يوضِّح شكل ٣-٨ ما تعنيه هذه التعريفاتُ من خلال الرسوم المعروضة. يحوي المنحنى الأولُ الموضَّح، وهو منحنًى بسيطٌ ومُغلَق في الوقت نفسِه، منطقةً واحدةً من المستوى، تُسمَّى داخل المنحنى. ومن الواضح أن كل مُنحنًى بسيطٍ مُغلق يُقسِّمَ المستوى إلى جزأَين، داخلي وخارجي (ثلاثة أجزاء إذا اعتبرنا المنحنى نفسه جزءًا).



شكل ٣-٧: عقدة ثلاثية الوُرَيقات

ولكن هذا واضحٌ حقًّا؟ نعم، واضحٌ بالتأكيد إذا كان المنحنى غيرَ مُعقَّد بدرجةٍ كبيرة. لكن ماذا عن المنحنى الموضَّح في شكل ٣-٩؟ إذا اخترتَ نقطةً في مكانٍ ما قربَ الوسط، فمن غيرِ الواضح تمامًا إذا ما كانت النقطة تقع داخلَ المنحنى أو خارجَه. ربما تقول إن الوضع ليس كذلك، لكن من المؤكَّد وجودُ جزءٍ داخلي وآخرَ خارجي للمنحنى، حتى لو كان من الصعب نظرًا إلى تعقيد المنحنى تمييزُهما بصورة مرئية.

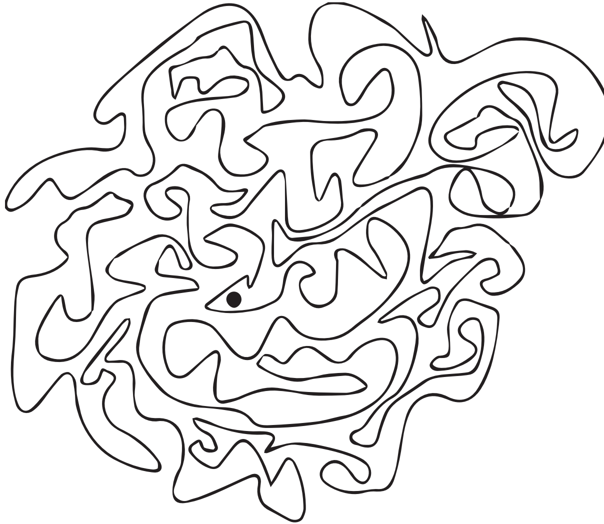
كيف يمكن للمرء تبريرُ هذا الاقتناع؟ ربما يحاول المرء تمييزَ الداخل من الخارج على النحو التالي. لنفترضْ لحظةً أن مَفهومَي الداخل والخارج لهما معنًى، عندئذٍ فإنك في كل مرةٍ تقطع المنحنى تنتقل من الداخل إلى الخارج أو العكس. ومن ثمَّ، فإنك إذا رغبتَ أن تُقرر ما إذا كانت نقطةً ما P تقع داخل المنحنى أو خارجَه، فإن كلَّ ما عليك

غير بسيط بسيط

مغلق

غير مغلق

شكل ٣-٨: أربعة أنواع من المنحنى



شكل ٣-٩: هل تقع النقطة السوداء داخل المنحنى أم خارجه؟

أن ترسُم خطًّا يبدأ من النقطة P وينتهي عند نقطةٍ ما أخرى Q تبعد بقدْرٍ كافٍ عن المنحنى حتى تكون خارجَه بوضوح. إذا قطع هذا الخطُّ المنحنى عددًا فرديًّا من المرات، فإن النقطة P تقع في الداخل، وإلا فإنها تقع في الخارج.

مشكلةُ هذه الحجة أنها تَعتبر أشياءَ كثيرةً أمرًا مُسلَّمًا به. على سبيل المثال، كيف لك أن تعرف إذا رسمتَ خطًّا آخرَ من P، ينتهي عند نقطة مختلفة R، أنك لن تحصلَ على إجابةٍ مختلفة؟ (لن تختلف الإجابة، ولكنه أمرٌ يتعيَّن إثبات صحته). جملة أن كلَّ منحنًى بسيطٍ مغلقٍ يكون له جزءٌ داخلي وآخرُ خارجي؛ هي في الواقع نظريةٌ رياضية شهيرة، تُعرف باسم نظرية منحنى جوردان. ومهما بدَت النظريةُ واضحة، فإنها تحتاج إلى برهان، وكلُّ البراهين المعروفة لها مختلفةٌ بالقدْر الذي لا يتَّسع معه المجالُ لعرضها جميعًا في هذا الكتاب.

الفصل الرابع

النهايات واللانهاية

في الفصل الأخير، حاولتُ الإشارة إلى إمكانيةِ صياغةِ مفهوم البرهان الرياضي بطريقةٍ منهجية تمامًا. إذا بدأ المرء من بعض المسلَّمات واتبع بعضَ القواعد وانتهى إلى جملةٍ رياضية مثيرة للاهتمام، فإن هذه الجملة سوف تُقبَل كنظرية، وبخلاف ذلك لن يُقبل. ترجع فكرة استنتاج المزيد والمزيد من النظريات المعقَّدة من بضع مُسلَّمات إلى إقليدس، الذي استخدم خمسَ مُسلَّمات فقط لإرساءِ موضوعات كبيرة في الهندسة. (سوف نناقش مُسلَّمات إقليدس في الفصل السادس.) وربما يتساءل المرءُ لماذا استغرَق الأمرُ حتى القرنِ العشرين لكي يُدرك الناسُ أن هذا النهج يمكن تعميمُه في الرياضيات ككلٍّ؟

السبب الرئيس يمكن تلخيصُه في كلمةٍ واحدة: «اللانهاية». بطريقةٍ أو بأخرى، فإن مفهوم اللانهاية لا غَناء عنه للرياضيَّات، وإن كان يُعَدُّ فكرةً صعبة للغاية لا يسهل تعريفُها بدقة. في هذا الفصل سأُناقش ثلاثَ جُمَل رياضية. يبدو كلٌّ منها بسيطًا في البداية، ولكن يتبيَّن بإمعانِ النظر أنها تتضمَّن مفهوم اللانهاية. وهذا من شأنه أن يُولِّد صعوباتٍ، ولذا سوف نتحدَّث في معظم هذا الفصل حول كيفية التعامل مع تلك الصعوبات.

(١) الجذر التربيعي للعدد 2 يساوي تقريبًا 1.41421356

أين تكمُن فكرةُ اللانهاية في جملةٍ بسيطة كالواردةِ أعلاه، والتي تقول ببساطةٍ إن عددًا صغيرًا ما يُساوي تقريبيًّا عددًا آخَر؟ تتمثل الإجابة في العبارة «الجَذر التربيعي للعدد 2»، التي تفترض ضِمنًا أن العدد 2 له جذرٌ تربيعي. إذا أردْنا أن نفهمَ الجملةَ فهمًا تامًّا، فإن هذه العبارة تضطرُّنا إلى أن نتساءل عن نوع الكائن الذي عليه الجذرُ التربيعيُّ للعدد 2. وهنا تكمن فكرةُ اللانهاية: الجذر التربيعي للعدد 2 هو عدد عشري غيرُ مُنتهٍ.

كما يُلاحَظ أنه لا ذِكر للانهايةِ في الجملة التالية الوثيقة الصلة: العدد 1.41421356 تربيعٌ يقترب من العدد 2. هذه الجملة هي مقدارٌ مُنتهٍ تمامًا، ومع ذلك يبدو أننا نقول الشيءَ نفسَه تقريبًا. وكما سترى لاحقًا، فهذا مُهم.

ماذا يعني القولُ بأنه يُوجَد كسرٌ عشري غير مُنتهٍ، يكون الناتج عند تربيعه هو 2؟ لقد تعلَّمنا في المدرسة كيف نضرب الكسورَ العشرية المنتهية، لا غيرَ المنتهية، وبطريقةٍ ما يُفترَض أنه يمكن جمعُها وضربها. ولكن كيف يمكن ذلك؟ لمعرفة نوع الصعوبات التي يمكن أن تنشأ، دَعْنا نتناول الجمع أولًا. عندما نجمع كسرَين عشريَّين منتهِيَين مثل 2.3859 و3.1405، فإننا نكتب أحدهما تحت الآخَر، ونجمع الأرقام المتناظرة بدءًا من جهة اليمين. نبدأ بجمع الرقمَين الأخيرَين 9 و5 معًا. هذا يُعطينا 14، ولذا نكتب 4 ونحتفظ بـ 1. وبعد ذلك، نجمع الرقمَين قبل الأخيرَين، 5 و0، والرقم المحتفَظ به 1، فنحصل بذلك على 6. واستمرارًا على هذا المنوال، نصل إلى الناتج، وهو 5.5264.

نفترض الآن أن لدَينا كسرَين عشرِيَّين غيرَ مُنتهيين. لا نستطيع أن نبدأ من اليمين لأن الكسر العشريَّ غيرَ المنتهي لا يُوجَد فيه رقم أخير. إذن كيف يُمكننا جمعُهما معًا؟ تُوجَد إجابةٌ واحدة بديهية. نبدأ من جهة اليسار. ولكن، ثَمة عائق في ذلك. إذا حاولنا هذا مع الكسرَين العشريَّين المنتهِيَين 2.3859 و3.1405، على سبيل المثال، فإننا نبدأ بجمع 2 و3، فنحصل على 5. وبعدها، ننتقل إلى يمين العلامة العشرية، فنجمع العددَين 3 و1، لنحصلَ على 4، وهو للأسف ناتجٌ غير صحيح.

هذا الخطأ مُثيرٌ للإزعاج، ولكنه ليس بكارثةٍ إذا احتفَظنا برباطةِ جأشِنا وأكمَلْنا. سنجمع بعد ذلك العددَين 8 و4، ويُمكننا هنا أن نكتب 2 على أنه الرقمُ الثالث في الناتج، ونُصحِّح الرقم الثاني بتغييره من 4 إلى 5. تستمرُّ هذه العملية بكتابة 5 على أنه العدد الرابع في الناتج، ويمكن تصحيحُه عندئذٍ إلى 6.

يُلاحَظ أن التصويبات ربما تحدث بعد وقتٍ طويل من كتابة الرقم. على سبيل المثال، إذا جمعنا العددَين 1.3555555555555573 و2.5444444444444452، فإننا نبدأ عندئذٍ بكتابة 3.8999999999999999، ولكن يجب تصحيح هذه السلسلة من العدد 9 عندما نصل إلى الخُطوة التالية، وهي جمعُ العددَين 7 و5. عندئذٍ، وعلى غِرار صفٍّ من أحجار الدومينو، تتحول التسعات إلى أصفارٍ عندما نحتفظ بـ 1 مرةً بعد مرة. ورغم ذلك، تنجح هذه النتيجة وتُعطينا الناتجَ 3.9000000000000025، وهذا يُتيح لنا إسباغَ معنًى على فكرةِ جمع كسرَين عشريَّين غيرِ مُنتهيين. ومن السهل أن نرى أن أيَّ

رقمٍ لن يتطلَّب التصحيحَ إلا مرةً واحدة فقط، ومن ثمَّ إذا كان لدَينا كسران عشريَّان غيرُ مُنتهيَين، فإن الرقم الذي ترتيبه 53 — على سبيل المثال — في مجموع الكسرَين سيكون هو ما نكتبه في الخطوة 53 من العملية الموضَّحة أعلاه، أو تصحيحه، في حالِ لو استلزم الأمرُ إجراءَ تصحيحٍ لاحقًا.

نودُّ أن نُوضح الافتراضَ القائل بوجود كسرٍ عشري مُنتهٍ، مربَّعُه هو العدد 2. للقيام بذلك، علينا أولًا أن نرى كيف نحصل على هذا الكسر العشريِّ غير المنتهي، ثم نفهم ما الذي نعنيه بضربِه في نفسه. وكما هو متوقَّع، فإن ضرب الكسور العشرية غيرِ المنتهية أكثرُ تعقيدًا من جمعها.

ولكن، دعنا نتناول أولًا طريقةً مُعتادة للحصول على الكسر العشري. يجب أن يقع بين العددَين 1 و2، لأن $1 = 1^2$، وهو أقلُّ من 2، و$4 = 2^2$، وهو أكبر من 2. إذا حسبت 1.1^2، و1.2^2، 1.3^2، وهكذا وصولًا إلى 1.9^2، فإنك تحصل على $1.96 = 1.4^2$، وهو أقل من 2، و$2.25 = 1.5^2$، وهو أكبرُ من 2. ولذا، فإن $\sqrt{2}$ يقع بين 1.4 و1.5، وعليه فإن المفكوك العشريَّ له لا بد أن يبدأ بـ 1.4. والآن لنفترض أنك حسبت بهذه الطريقة بحيث إن الأرقام الثمانية الأولى بـ $\sqrt{2}$ هي 1.4142135. يمكنك عندئذٍ إجراءُ العمليات الحسابية التالية التي توضح أن الرقم التاليَ هو 6.

$$1.41421350^2 = 1.9999998236822500$$

$$1.41421351^2 = 1.9999998519665201$$

$$1.41421352^2 = 1.9999998802507904$$

$$1.41421353^2 = 1.9999999085350609$$

$$1.41421354^2 = 1.9999999368193316$$

$$1.41421355^2 = 1.9999999651036025$$

$$1.41421356^2 = 1.9999999933878736$$

$$1.41421357^2 = 2.0000000216721449$$

بتَكرار هذه الخطوات، يمكننا الحصول على أرقام بالعدد الذي نريد. ومع أنك لن تنتهيَ حقيقةً من هذه العملية، فإن لديك على الأقل طريقةً واضحة تمامًا لتعريف الرقم النونيِّ nth بعد العلامة العشرية، أيًّا كانت قيمةُ n: سيكون الرقم النهائي نفسُه في أكبر كسرٍ عشريٍّ مربعُه أقلُّ من 2 وبه عدد n من الأرقام بعد العلامة العشرية. على سبيل المثال، 1.41 هو أكبر كسرٍ عشري مربَّعه أقلُّ من 2 وبه رقمان بعد العلامة العشرية، وعليه فإن $\sqrt{2}$ يبدأ بـ 1.41.

دعنا نُسَمِّ الكسرَ العشريَّ غير المنتهي الناتج x. ما سبب ثِقتنا أنَّ $x^2 = 2$؟ يمكننا أن نُجيب على النحو التالي.

$$1^2 = 1$$

$$1.4^2 = 1.96$$

$$1.41^2 = 1.9881$$

$$1.414^2 = 1.999396$$

$$1.4142^2 = 1.99996164$$

$$1.41421^2 = 1.9999899841$$

$$1.414213^2 = 1.999998409469$$

$$1.4142135^2 = 1.99999982368225$$

$$1.41421356^2 = 1.999999933878736$$

كما يتَّضح في جدول العمليات الحسابيةِ أعلاه، كلما زاد عددُ الأرقام التي نَستخدِمها للمفكوك العَشري بـ $\sqrt{2}$، حصلنا على عددٍ أكبر من التسعات بعد العلامة العشرية عند ضرب العدد في نفسِه. ومن ثمَّ، إذا استخدَمْنا المفكوكَ غيرَ المنتهي الكليَّ بـ $\sqrt{2}$، فإننا نحصل على عددٍ لا نهائي من التسعات، والعدد ...1.99999999 (يُقرأ «واحد وتسعة من عشرة دوري») يساوي 2.

تنطوي هذه الطريقةُ على صعوبتَين؛ الأولى: لماذا العدد ...1.99999999 يساوي 2؟ والثانية، والأهم: ماذا يعني أن «نستخدم المفكوكَ اللانهائيَّ الكلي»؟ هذا ما كنا نحاول فَهمه في المقام الأول.

لتفادي المأخذِ الأول؛ يجب مرةً أخرى أن نُنحِّي جانبًا أيَّ نزعاتٍ مثاليةٍ غير عمَلية. إنها لَحقيقةٌ مقبولة رياضيًّا أنَّ العدد ...1.99999999 – 2 يساوي 2، ولكن هذه الحقيقة لم تكن نِتاجَ إحدى عمليات التأمُّل الميتافيزيقي. بل هي بالأحرى تقليدٌ مُتعارَف عليه. ومع ذلك، فإنها بأي حالٍ ليست تقليدًا اختياريًّا؛ لأن عدم تطبيقها يضطرُّنا إما إلى استحداثِ كائناتٍ جديدة غريبة، أو التخلِّي عن بعض قواعد الحساب المعروفة. على سبيل المثال، إذا اعتبرت أن ...1.99999999 – 2 لا يساوي 2، فما ناتج ...1.99999999 – 2؟ إذا كان الناتج صفرًا، فقد تخلَّيتَ بذلك عن القاعدة المفيدة التي تنصُّ على أن x يجب أن يُساويَ y عندما $x - y = 0$. وإذا لم يكن صفرًا، فإنه لا يكون له مفكوكٌ عشري متعارَف عليه (وإلا، فاطرَحْه من 2 ولن تحصلَ على العدد ...1.99999999، ولكنْ على عددٍ أصغر)، ما يضطرُّك إلى استحداثِ كائن جديد مثل «صفر متبوعًا بعلامة عشرية، ثم عدد لا نهائي من الأصفار، ثم واحد». إذا قمتَ بذلك، فستكون هذه مجردَ بدايةٍ للصعوبات التي ستُواجهك. فعلامَ تحصل عند ضربِ هذا العدد المبهَم في نفسه؟ عدد لا نهائي من الأصفار، ثم عدد لا نهائي من الأصفار مرةً أخرى، ثم واحد؟ ماذا يحدث إذا ضربتَه في 10 بدلًا من ذلك؟ هل تحصل على عدد «ما لا نهاية ناقص واحد» من الأصفار متبوعًا بواحد؟ ما المفكوكُ العشري للعدد 1/3؟ والآن، اضرِب هذا العددَ في 3. هل الناتج هو 1 أم ...0.999999؟ إذا اتبعتَ الطريقة المعتادة المتعارَف عليها، فلن تُثار أسئلةٌ مُحيِّرة من هذا النوع. (مُحيِّرة لكنها مُستحيلة؛ اكتشفَ أبراهام روبنسون مفهومًا متَّسقًا للأعداد «المتناهية الصِّغر» في ستينيَّات القرن العشرين، لكنَّ نظريته، التي سُمِّيَت بالتحليل غير القياسي، لم تصبح جزءًا من الاتجاه السائد في الرياضيات.)

الصعوبة الثانية أكثرُ تأصلًا، لكننا نستطيع التحايُلَ عليها. بدلًا من محاولة تصوُّر ما يحدث فعلًا إذا طبَّقنا نوعًا من عمليات الضرب المطوَّل على الكسور العشرية غيرِ المنتهية، فإننا نُفسر الجملة $x^2 = 2$ على أنها تعني ببساطةٍ أننا كلَّما أخذْنا أرقامًا أكثرَ من x، اقترب مربعُ العدد الناتج من 2، كما لاحظنا ذلك توًّا. وإمعانًا في الدقة، لنفترضْ أنك أصررتَ على الحصول على عدد، عند تربيعه، يُنتج عددًا يبدأ بـ ...1.9999. سأقترح

العدد 1.4142، الذي نحصل عليه من الأرقام الأولى القليلة بـ x. بما أن العدد 1.41421 قريبٌ جدًّا من العدد 1.41422، أتوقع أن يكون مربَّعاهما أيضًا متقارِبَين جدًّا (وهذا يمكن إثباتُه بسهولةٍ تامة). ولكن بسبب كيفية اختيار x، فإن العددَ 1.41421^2 أقلُّ من 2 والعدد 1.41422^2 أكبر من 2. ومن ثمَّ، فإن كلا العددَين قريب جدًّا إلى العدد 2. وللتحقق فحسب: $1.41421^2 = 1.9999899241$، وبذلك أكون قد وجدت عددًا بالخاصية التي تُريدها. إذا طلبت الآن عددًا يبدأ، عند تربيعه، بـ

$$1.99999999999999999999999999999999999999999999999999\ldots,$$

ففي مقدوري حينها استخدامُ الحُجة نفسِها تمامًا، لكن مع عددٍ أكبر قليلًا من الأرقام في x. (يتضح أنه إذا أردتَ عدد n من التسعات، فسيكون وجودُ عدد $n + 1$ من الأرقام بعد العلامة العشرية كافيًا دائمًا.) وحقيقةُ أنه يُمكنني القيام بذلك، أيًّا كان عددُ التسعات الذي تريده، هي المقصودُ بالقول إنَّ العدد العشريَّ غيرَ المنتهي x، عند ضربه في نفسه، يُساوي 2.

يُلاحظ أن ما فعلناه هنا أننا جعلنا مفهومَ غيرِ المنتهي «مُستساغًا»، بشرح جُملةٍ تتضمَّن اللانهاية على أنها لا تَعْدو أن تكون أكثرَ من بديلٍ مُختصَر مُستحسَن لجُملةٍ أكثر تعقيدًا لا تتضمَّن مفهوم اللانهاية. الجملة غير المنتهية المستحسَنة هي «n هو كسرٌ عشري غيرُ مُنتهٍ مربعه 2». ويمكن ترجمة هذا إلى شيءٍ من قبيل «تُوجَد قاعدة، لأي عدد n، تُحدِّد على نحوٍ واضح العدد النونيَّ بـ x. وهذا يسمح لنا بتكوينَ كُسورٍ عشرية مُنتهية طويلة اختياريًّا، تكون مربَّعاتها قريبةً من 2 بالقدرِ الذي نريده، وذلك ببساطة عن طريق اختيارها طويلةً بقدْرٍ كافٍ.»

هل ما أعنيه بذلك أن المعنى الحقيقيَّ للجملة البسيطة في ظاهرها $x^2 = 2$ هي في الواقع جملةٌ مُعقَّدة للغاية؟ هذا ما أعنيه من ناحيةٍ ما؛ لأن الجملة تنطوي بالفعل على بعض التعقيدات غير الظاهرة، ولكن من ناحيةٍ أخرى مهمةٍ فإنني لا أعني ذلك. فمن المجهِد تعريفُ عمليتَي جمع الكسور العشرية غير المنتهية وضربها دون الإتيان على ذِكر اللانهاية، ويجب التحقُّق من أن التعريفات المعقَّدة الناتجة تُطبِّق القواعدَ المذكورة في الفصل الثاني، مثل قانونَي الإبدال والتجميع. ومع ذلك، بمجرد أن يتمَّ ذلك، يُصبح لنا مُطلق الحرية للتفكير بطريقةٍ مجردة مرةً أخرى. ما يعنينا في x هو أن مربعه 2. وكلُّ ما يَعنينا في كلمة «مربعه» أن معناها يعتمد على تعريفٍ ما لعمليةِ الضرب يخضع

للقواعد الملائمة. لا يَعنينا حقًّا ماهيَّةُ الرقم في الموضع تريليون من x، ولا يعنينا حقًّا أن تعريف عملية الضرب معقَّدٌ إلى حدٍّ ما.

(٢) بلَغنا سرعة 40 ميلًا في الساعة بمجردِ أن تجاوَزْنا عمودَ الإنارة هذا

افترِض أنك في عرَبة مُتسارعة، وأنَّك لاحظتَ أن عدَّاد السرعة يتحركُ بانتظامٍ من 30 ميلًا في الساعة إلى 50 ميلًا في الساعة. من المُغري أن تقول في لحظةٍ مُعينة — تحديدًا اللحظة التي يتجاوز فيها مؤشرُ عدَّاد السرعة 40 — إن السيارة تسير بسرعة 40 ميلًا في الساعة. قبل تلك اللحظة، كانت السيارة أبطأَ وبعدها أصبحَت أسرع. ولكن، ما معنى أن تقول إن السيارة تسير بسرعةِ 40 ميلًا في الساعة في لحظةٍ مُعيَّنة؟ إذا كانت السيارة غيرَ مُتسارعة، فإننا نستطيع أن نَقيس عدد الأميال التي تقطعها في الساعة، وهذا يُعطينا سرعتَها. (ولكن كحلٍّ بديل، وأكثر عمَليةً، يمكن أن نحسب مقدارَ المسافة التي تقطعها السيارة في 30 ثانية، ونضرب الناتج في 120.) ولكن، هذه الطريقة من الواضح أنها لا تصلح مع السيارة المتسارِعة: إذا قِسنا المسافةَ التي قطعَتها السيارة في زمنٍ معيَّن، فكلُّ ما نستطيع حسابَه هو السرعة المتوسِّطة خلال هذا الزمن، وهي لن تُخبرنا بشيءٍ عن سرعة السيارة في لحظةٍ بعينها.

كان من الممكن أن تختفيَ هذه المشكلةُ لو استطعنا قياسَ المسافة التي قطعَتها السيارةُ خلال زمن مُتناهٍ في الصغر؛ لأن السرعة ما كانت لِتَجد وقتًا عندئذٍ يسمح لها بأن تتغيَّر. لو دامت الفترة الزمنية لعدد t من الساعات، حيث t عددٌ متناهٍ في الصغر، لاستطعنا قياسَ عدد الأميال التي تقطعها السيارةُ خلال هذا العدد t من الساعات، ولأخَذنا بعدها الناتج s، الذي كان سيكون بالطبع عددًا مُتناهيًا في الصِّغر كذلك، ونقسِمه على t، فنحصل بذلك على السرعة اللحظية للسيارة.

يقودنا هذا النهجُ التصوُّري إلى مسائلَ مشابهةٍ كثيرًا لتلك التي صادفناها عندما تناوَلنا بإيجازٍ فكرةَ أن العدد $1.9999\ldots$ ربما لا يُساوي 2. فهل t يساوي صفرًا؟ إذا كان كذلك، فمن الواضح تمامًا أن s لا بد أنها أيضًا تُساوي صفرًا (لا تستطيع سيارةٌ أن تقطع أيَّ مسافة في لا زمن على الإطلاق). ولكن، لا يمكن قسمةُ صفرٍ على صفر والحصولُ على ناتج غيرِ مُبهَم. ومن ناحية أخرى، إذا كان t لا يساوي صفرًا، فإن السيارة تتسارع خلالَ ذلك العدد t من الساعات ويكون القياس غيرَ صحيح.

إنَّ السبيل إلى فَهم السرعة اللحظية هو الاستفادةُ من حقيقة أن السيارة لا يكون لديها الوقتُ لتتسارع بالقدرِ الكبير للغاية إذا كانت قيمة t صغيرة جدًّا — لنقُل جزءًا على مائة من الثانية. افترض أننا لا نريد حسابَ السرعة بالضبط، لكن نريد بدلًا من ذلك الحصولَ على تقديرٍ جيد لها. إذا كانت أجهزةُ القياس لدينا دقيقة، فإننا نستطيع أن نحسبَ المسافة التي تقطعها السيارةُ في جزءٍ على مائةٍ من الثانية، ونضربَ هذه المسافة في عدد الأجزاء من مائةٍ على الثانية خلال ساعة، أو $36,000$. لن يكون الناتجُ صحيحًا تمامًا، لكن بما أن السيارة لا تستطيع أن تتسارع كثيرًا خلالَ جزءٍ على مائة من الثانية، فسوف يُعطينا ذلك أقربَ قيمةٍ تقريبية.

يُذكِّرنا هذا الموقفُ بحقيقة أن 1.414135^2 هو أقربُ عدد إلى 2، ويُتيح لنا هذا أن نتفادى القلقَ بشأن غيرِ المنتهي، أو في هذه الحالة المتناهي في الصغر، بطريقةٍ مُشابهة كثيرًا. لنفترض بدلًا من قياس المسافة التي قطعَتها السيارةُ في جزءٍ على مائةِ جزء من الثانية، أننا قِسْنا المسافة التي قطعَتها خلال جزءٍ على مليون من الثانية. كانت السيارة ستتسارع بدرجةٍ أقلَّ خلال هذا الزمن، ومن ثمَّ كان الناتج سيكون أدقَّ رغم ذلك. تمنحنا هذه الملاحظةُ طريقةً لترجمة الجملة «تسير السيارة بسرعة 40 ميلًا في الساعة ... الآن!» إلى جملةٍ مُنتهية أكثرَ تعقيدًا: «إذا حدَّدت هامشَ الخطأ المسموح لي، فما دام t عددًا صغيرًا بما يكفي من الساعات (عادةً أقل من 1)، فيُمكنني حسابُ عدد الأميال التي تقطعها السيارة في عدد t من الساعات، وقِسمتُه على t، فنحصل على الناتج الذي سيكون قريبًا على الأقل من 40 ميلًا في الساعة طبقًا لهامش الخطأ المسموح لي.» على سبيل المثال، إذا كان t صغيرًا بما يكفي، فيُمكنني تأكيدُ أن تقديري سيكون ما بين 39.99 و40.01. إذا طلبت ناتجًا دقيقًا في نطاق 0.0001، فربما يتعيَّن عليَّ حينَئذٍ أن أجعل t أصغر، ولكن بقدرِ ما تكون قيمتُه صغيرةً بما يكفي، يمكنني إعطاؤك درجةَ الدقة التي تريدها.

مرةً أخرى، نحن بصدد تناوُل جملةٍ تتضمَّن مفهوم اللانهاية كطريقةٍ ملائمة لكتابة جملة أكثرَ تعقيدًا بخصوص التقريب. يمكن استخدام كلمة أخرى، قد تكون أكثرَ إيحاءً، وهي «النهاية». الكسر العشري غير المنتهي هو نهايةٌ متتابعة من الكسور العشرية المنتهية، والسرعة اللحظية هي نهايةُ التقديرات التي نضعها بقياس المسافة المقطوعة خلال أوقاتٍ زمنية أقصرَ فأقصر. كثيرًا ما يتحدث علماءُ الرياضيَّات عمَّا يحدث «بداخل النهاية» أو «عند اللانهاية»، لكنهم يُدركون أنهم لا يقصدون إلى الجدِّية التامة عندما يفعلون ذلك. وفي حال الضغط عليهم للإفصاح عما يَعْنونه بالضبط، فإنهم يبدَءون في الحديث عن التقريب بدلًا من ذلك.

(٣) مساحة الدائرة التي نِصف قُطرها r يساوي πr^2

إنَّ إدراك أن اللانهائي يمكن فهمه في صورةِ حدود منتهية كان واحدًا من أهم انتصارات القرن التاسع عشر في مجال الرياضيَّات، على الرغم من أن جذوره تعود إلى حقبةٍ أسبقَ من ذلك بكثير. في مناقشةِ مثالي الآتي، كيفية حساب مساحة الدائرة، سوف أستخدِمُ حُجةً اخترعها أرشميدس في القرن الثالث قبل الميلاد. ولكن قبل إجراء هذه العملية الحسابية، علينا أن نُحدِّد ماهيَّة ما نحسبه، وهو ليس بأمرٍ سهل كما قد يظن المرء. ما المقصود بالمساحة؟ إنها بالطبع شيءٌ مثل مقدار المادة التي تُغطي سطح الشكل (أي: المادة الثنائية البُعد)، لكن كيف يُمكننا حسابُها بدقة؟

أيًّا كان الأمر، فإنه يبدو من السهل بالتأكيد حسابُ المساحة لبعض الأشكال. على سبيل المثال، إذا كان لدَينا مثلثٌ يبلغ طولا ضِلعَيه a وb، فإن مساحته هي ab. يمكن التفكير في أي مثلثٍ قائم الزاوية على أنه ينتج عن قصِّ مُستطيلٍ إلى نصفَين عموديًّا على أحد قُطرَيه، وبذلك تكون مساحته هي نصفَ مساحة المستطيل المناظر. يمكن قصُّ أي مثلث إلى مثلثَين قائمَي الزاوية، ويمكن تقسيم أيِّ مضلَّع إلى مثلثات. وهكذا، لن يكون من الصعب حسابُ المساحة لِمضلَّع. فبدلًا من الانشغال بماهية ما حسَبناه بالضبط، يمكن ببساطةٍ تعريفُ مساحة المضلع بأنها مُحصلة ما حسبناه (ما إن نُقنع أنفسنا بأن تقسيم المضلع إلى مثلثاتٍ بطريقتَين مختلفتَين لن يُعطينا ناتجَين مختلفَين).

تبدأ مُشكلاتنا عندما نبدأ في تناول الأشكال ذاتِ الحدود المنحنية. فلا يمكن تقسيمُ الدائرة إلى عددٍ صغيرٍ من المثلثات. وعليه، ماذا نقصد عندما نقول إن مساحة الدائرة تساوي πr^2؟

هذا مثالٌ آخر يساعد فيه كثيرًا المنهجُ المجرَّد. دعنا لا نُركِّز على ماهيَّة المساحة، بل على ما تفعله. هذا الاقتراح يحتاج إلى توضيح؛ حيث لا يبدو أن المساحة تفعل الكثير، ولكنْ مؤكَّدٌ أنها موجودة. ما أعنيه هو أنه يجب التركيز على الخصائص التي يتضمَّنها أيُّ مفهوم منطقي للمساحة. سنستعرِض فيما يلي خمسَ خصائص.

الخاصيَّة الأولى: إذا حرَّكت شكلًا، فإن مساحته لا تتغيَّر. (أو بصيغةٍ أكثرَ تخصصًا: أيُّ شكلَين مُتطابقَين متماثلان في المساحة).

الخاصية الثانية: إذا وُضِعَ شكلٌ بأكمله داخلَ شكلٍ آخر، فإن مساحة الأول لا يمكن أن تكون أكبرَ من مساحة الثاني.

الخاصية الثالثة: تُحسَب مساحة المستطيل بضربِ طولَي ضلعَيه.

الخاصية الرابعة: إذا قصصتَ شكلًا إلى بضعة أجزاء، فإن مجموع مساحات الأجزاء يساوي مساحةَ الشكل الأصلي.

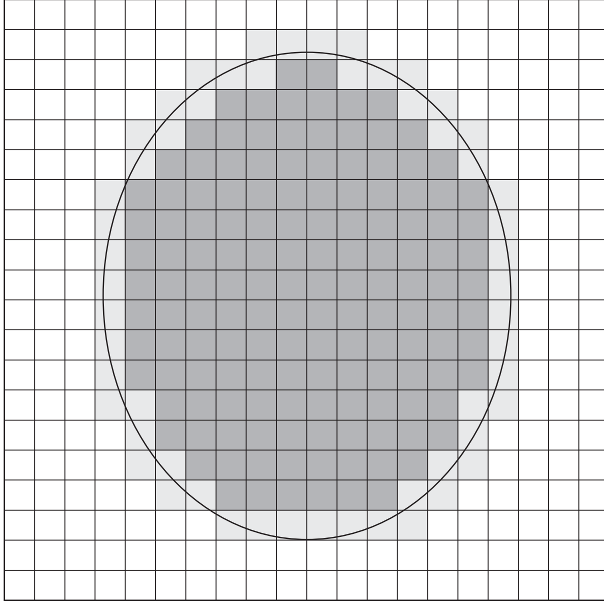
الخاصية الخامسة: إذا مدَدتَ شكلًا بمُعامل 2 في كل اتجاه، فإن المساحة الناتجة تُساوي المساحة الأصلية مضروبةً في 4.

إذا نظرتَ فيما سبق، فستجد أننا استخدمنا الخصائصَ الأولى والثالثة والرابعة لحساب مساحة المثلث القائم الزاوية. قد تبدو الخاصيةُ الثانية بديهيةً لدرجةِ أنها لا تستحقُّ الذِّكر، لكن هذا ما يتوقَّعه المرءُ في حالة المسلَّمات، وسوف نرى فيما بعدُ أنها مفيدةٌ جدًّا. وعلى الرغم من أهمية الخاصية الخامسة، فإننا قد لا نحتاج إليها حقًّا كمُسلَّمة نظرًا إلى أنها يمكن استنتاجها من الخصائص الأخرى.

كيف يمكننا استخدامُ هذه الخصائص لتوضيح المقصودِ بمساحة الدائرة؟ رسالة هذا الفصل حتى الآن أنه قد يكون من المُثمر أن نُفكر في تقريب المساحة بدلًا من تعريفها في خطوةٍ واحدة. يمكن ذلك بسهولةٍ تامة على النحو التالي. تخيَّل شكلًا مرسومًا على قطعةٍ من ورق الرَّسم البياني يتكوَّن من شبكةٍ مُنتظِمة من المربَّعات. نعرف مساحة هذه المربعات من الخاصية الثالثة (بما أن المربع نوعٌ خاصٌّ من المستطيل)؛ ولذا يمكننا أن نُحاول تقديرَ مساحة الشكل بإحصاءِ عدد المربعات الواقعة بالكامل داخل الشكل. فإذا كان الشكلُ يحتوي مثلًا على 144 مربعًا، فإن مساحته ستكون على الأقل 144 مرةً من مساحة المربع. لاحِظ أن ما حسَبناه فعليًّا هو مساحةُ شكلٍ مكوَّن من 144 مربعًا، وهو ما يمكن تحديده بسهولةٍ بواسطة الخاصيتَين الثالثة والرابعة.

بالنسبة إلى الشكل الموضَّح في شكل ٤-١، فإنه لا يُعطي الإجابة الصحيحة؛ نظرًا إلى أن العديد من المربعات يقع جزءٌ منها داخل الشكل وجزءٌ خارجَه، ومن ثَمَّ فإننا لم نحسب كلَّ المساحة. ولكن، تُوجَد طريقة جيدة لتقدير المساحة على نحوٍ أفضل، وهي تقسيم كلِّ مربعٍ إلى أربعة مربعات أصغر، واستخدام هذه المربعات الأصغر بدلًا من المربعات الأصلية. وكما في السابق، فإن بعض المربعات سيكون جزءٌ منها داخل الشكل، وجزءٌ خارجَه، لكننا الآن ضمَمْنا جزءًا أكبرَ قليلًا من الشكل ضمن المربعات التي تقع بأكملها داخلَه. وعلى العموم، كلما زادت دقةُ شبكة المربعات، أخذنا في اعتبارنا مقدارًا أكبرَ من الشكل عند حساب مساحته. نجد (وهذه ليست حقيقةً واضحة تمامًا كما تبدو) أنه عندما نتناول شبكاتٍ أدقَّ وأدق، تحتوي على مربعاتٍ أصغرَ فأصغر، فإن نتائج

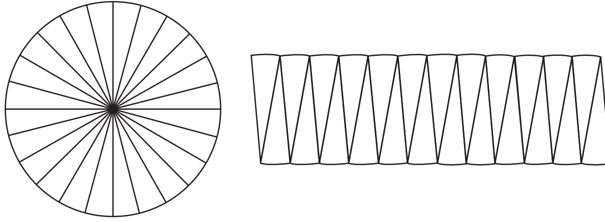
الحسابات تكون أقربَ أكثر وأكثر إلى عددٍ ما، تمامًا كما تقترب نتائجُ تربيعِ قِيَمٍ تقريبية أفضلَ فأفضل إلى $\sqrt{2}$ من العدد 2، ونحدِّد هذا العدد ليكون مساحة الشكل.



شكل ٤-١: حساب المساحة التقريبية لشكلٍ مُنحنٍ

وعليه، نزوعًا إلى المفهوم الرياضي، فإن جملة «للشكل مساحةٌ مقدارها ياردة مربَّعة واحدة» تعني الآتي. في حال السماح بهامشٍ خطأ مُعيَّن، يمكننا — مهما كان صِغَر الهامش — اختيارُ شبكةٍ من المربعات منتظمةٍ بما يكفي، ثم نحسب المساحةَ التقريبية بجمع مساحات المربعات داخل الشكل، فنحصل بذلك على ناتجٍ يكون الفارقُ بينه وبين الياردة المربعة الواحدة أقلَّ من ذلك الهامش المسموح به. (ربما نعلم في أعماق أنفسنا، ولكننا لا نبوح بالأمر، أنه «بداخل النهاية» يمكن استعمالُ عددٍ لا نهائيٍّ من المربعات المتناهية في الصغر، والحصولُ على الناتج الصحيح تمامًا.)

تُوجَد طريقة أخرى لتناول هذه الفكرة ربما تكون أوضحَ عن سابقتها. إذا كان لدَينا شكلٌ مُنحنٍ مساحتُه 12 سنتيمترًا مربعًا بالضبط، وطُلِبَ إليَّ توضيحُ ذلك باستخدام

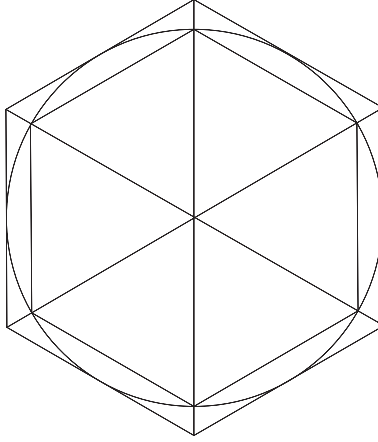


شكل ٤-٢: طريقة أرشميدس لإثبات أن مساحة الدائرة تساوي πr^2

شبكةٍ من المربعات، فإن مهمَّتي ستكون مستحيلة؛ إذ سأحتاج إلى عددٍ لا نهائي من المربَّعات. ولكن، إذا أعطيتَني أيَّ عددٍ بخلاف 12، كالعدد 11.9 مثلًا، فيُمكنني حينها استخدامُ شبكةٍ من المربعات لأُثبت على نحوٍ قاطع أن مساحة الشكل ليست هذا العدد: كلُّ ما عليَّ فعلُه هو اختيار شبكةٍ منتظمة بدرجةٍ كافية لكي تكون المساحةُ غيرُ المتضمَّنةِ أقلَّ من 0.1 سنتيمتر مربع. بعبارة أخرى، يمكنني إيجاد المساحة دون التطرُّق إلى اللانهاية إذا اكتفيت — بدلًا من إثبات أن المساحة تساوي 12 — بإثبات أنها ليست أيَّ شيءٍ آخر. وعندئذٍ، ستكون مساحةُ الشكل هي العددَ الوحيد الذي لا يُمكنني إثباتُ عدم صحته.

تمنحنا هذه الأفكارُ تعييناً مُقنِعًا للمساحة، لكنها ما زالت تضعنا أمام مشكلة. كيف يمكننا إثباتُ أنه إذا استخدمنا الإجراءَ أعلاه لتقديرِ مساحة دائرة نصفُ قطرها r، فإن تقديرنا سيكون أقربَ فأقرب إلى πr^2؟ الإجابة التي تنطبق على معظم الأشكال هي أن علينا استخدامَ حساب التكامل، وهو موضوعٌ لا أتطرَّق إليه بالمناقشة في هذا الكتاب، أما فيما يخصُّ الدائرة، فإنه يمكننا استخدامُ الحجة العبقرية لأرشميدس، كما ذكرتُ سابقًا.

يعرض شكل ٤-٢ دائرةً قُسِّمَت إلى أجزاءٍ، ثم فُصِلَت هذه الأجزاءُ وأُعيد تجميعُها من جديد، فتكوَّن بذلك شكلٌ مستطيل تقريبًا. ولأنَّ عرض الأجزاء صغيرٌ جدًّا، فإن ارتفاع المستطيل يكون مُساويًا تقريبًا لنصف قُطر الدائرة r. مرةً أخرى، نظرًا إلى أن عرض الأجزاء صغيرٌ جدًّا، فإن الضلعَين العُلويَّ والسفليَّ للمستطيل التقريبي عبارةٌ عن خطَّين مُستقيمَين تقريبًا. بما أن كلَّ ضلعٍ منهما يرتكز على نصف مُحيط الدائرة، وطبقًا لتعريف π فإن محيط الدائرة يساوي $2\pi r$، ومن ثمَّ يكون طولُ كلِّ ضلع πr تقريبًا. وعليه، فإن مساحة المستطيل التقريبيِّ تساوي $r \times \pi r = \pi r^2$ — تقريبيًّا على الأقل.



شكل ٤-٣: إيجاد مساحة دائرة تقريبيًّا بواسطة مضلع

بالطبع، تبلغ المساحةُ بالضبط πr^2 بما أن كلَّ ما فعلناه هو تقسيمُ الدائرة وتغيير مواضع الأجزاء، لكننا لا نعرف هذه القيمةَ حتى الآن. ربما أقنعَتك هذه الحجةُ بالفعل، لكنها لم تنتهِ تمامًا؛ إذ علينا إثباتُ أن التقريب السابق يقترب أكثرَ فأكثر من πr^2 كلما ازداد عدد الأجزاء. باختصار شديد، إحدى الطُّرق للقيام بذلك هي أخذ المضلعَين المنتظمَين، المضلَّع المتضمَّن داخل الدائرة والآخر الذي يتضمَّن الدائرة نفسَها. يوضح شكل ٤-٣ هذه الفكرة باستخدام شكلَين سُداسيَّين. محيط المضلع الداخليِّ أقصرُ من محيط الدائرة، بينما محيط المضلع الخارجي أطولُ منه، ويمكن تقسيم كلٍّ من المضلعَين إلى جزأَين مثلثَي الشكل ثم تجميعُهما في شكلَي متوازي أضلاع. يتضح بعمليةٍ حسابية مباشرة أن مساحة متوازي الأضلاع الأصغرِ أقلُّ من r مضروبةً في نصف محيط المضلع الداخلي، ومن ثَم فهي أقلُّ من πr^2. وبالمثل، فإن مساحة المضلع الأكبرِ أكبرُ من πr^2. ومع ذلك، إذا زاد عدد الأجزاء بدرجة كافية، فإنه يمكن تقليلُ الفرق بين مساحتَي المضلعَين حسبما نريد. وبما أن الدائرة تحوي دائمًا المضلعَ الأصغر، ومتضمَّنةٌ داخل المضلع الكبير فإن مساحتها يجب أن تكون πr^2 بالضبط.

الفصل الخامس

البُعد

إنَّ إحدى السِّمات البارزة في الرياضيَّات المتقدمة أنَّ الكثيرَ منها يتعلق بالهندسة فيما يزيد عن ثلاثة أبعاد. هذه الحقيقة مُحيِّرةٌ لغير الرياضيين: الخطوط والمنحنَيات لها بُعدٌ واحد، والأسطح لها بُعدان، والمُجسَّمات لها ثلاثةُ أبعاد، ولكن كيف يكون لشيءٍ ما أربعةُ أبعاد؟ إذا كان لدَينا جسمٌ له طولٌ وعرض وعُمق، فإنه يَشغَل حيزًا كاملًا من الفراغ، ولا يبدو حينئذٍ أن هناك مجالًا لأيِّ أبعادٍ أخرى. اقتُرِحَ أحيانًا أن البُعد الرابع هو الزمن، وهي إجابةٌ جيدة في بعض السياقات مثل النسبية الخاصة، لكنها لا تُساعدنا في فَهم البُعد السادس والعشرين — مثلًا — أو حتى الهندسة اللانهائية الأبعاد، وكلاهما له أهميَّته في الرياضيات.

الهندسة الكبيرةُ الأبعادِ هي مثالٌ آخَر على مفهومٍ يمكن فهمُه على أفضلِ نحوٍ من منظورٍ مجرد. بدلًا من القلق بشأن كينونة الفراغ ذي الستة والعِشرين بُعدًا ووجودِه أو ما شابه، دعنا نُفكِّر في خصائصِ هذا الفراغ. وربما تتعجَّب كيف يمكن التفكيرُ في خصائص شيءٍ ما دون إثباتِ وجوده أولًا، لكن هذا الموضوع يمكن التغلبُ عليه بسهولة. إذا حذفتَ كلمتَي «شيءٍ ما»، فإن السؤال يصبح: كيف يمكن التفكيرُ في مجموعةٍ من الخصائص دون إثباتِ وجود شيءٍ أولًا له تلك الخصائص؟ لكن هذا ليس صعبًا على الإطلاق. على سبيل المثال، يمكن أن يُخَمِّن المرءُ السماتِ المحتملةَ لشخصية المرأة التي يمكن أن تتقلَّد منصبَ رئيس الولايات المتحدة، مع أنه لن يُوجَد أبدًا ما يضمن أن تتقلَّد امرأةٌ هذا المنصب.

ما نوع الخصائص التي قد تتوقعها في حالةِ الفراغ ذي الستة والعشرين بُعدًا؟ الخاصية الأبرزُ هي الخاصية التي تجعله ذا ستةٍ وعشرين بُعدًا، وهي أنه يلزم وجود ستة وعِشرين عددًا لتعيينِ نقطة، تمامًا كما يلزم وجود عددَين في حالة البُعدَين، وثلاثةِ أعداد

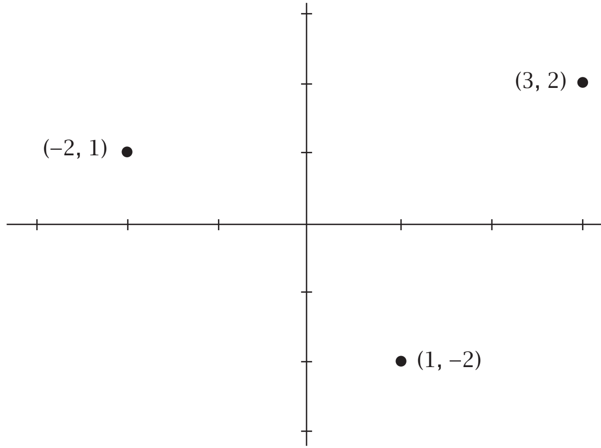
في حالة الثلاثة أبعاد. والخاصية الأخرى هي أنك إذا أخذتَ شكلًا ذا ستةٍ وعشرين بُعدًا ومدَدتَه في جميع الاتجاهات بمُعاملِ تمدُّدٍ مقدارُه اثنان، فإن «حجمه» — بافتراض أننا نفهم ما يعنيه هذا المصطلح — يجب أن يُساوي الحجمَ الأصلي مضروبًا في 2^{26}. وهكذا.

لن تكون لهذه التأمُّلات أهميةٌ كبيرة في حالِ اتضح أن هناك تناقضًا منطقيًّا فيما يخصُّ مفهومَ الفراغ ذي الستة والعشرين بُعدًا. ولكي نتحقَّق من هذا الأمر، سنودُّ أن نُثبت على أي حالٍ أنه موجود — وهو أمرٌ غير واردٍ بطبيعة الحال في حالِ انطوى على تناقُض — ولكنه سيكون إثباتًا لوجوده بالمفهوم الرياضيِّ لا المادي. هذا يعني أننا بحاجةٍ إلى تعريف نموذجٍ مُناسب. وقد لا يكون بالضرورة نموذجًا لأيِّ شيء، ولكن إذا كان له جميعُ الخصائص التي نتوقَّعها، فإنه سيُثبت أن هذه الخصائص متَّسقة. ومع ذلك، يتضح غالبًا أن النموذج الذي نُعرِّفه مفيدٌ جدًّا.

(١) كيفية تعريف فراغٍ كثير الأبعاد

من السهل جدًّا تعريفُ النموذج بمجرد أن تتوفَّر لدَينا فكرةٌ واحدة، وهي: الإحداثيَّات. وكما قلت، فإنه يمكن تعيينُ نقطةٍ في بُعدَين باستخدام عددَين، بينما يستلزم تعيينُ نقطةٍ في ثلاثة أبعاد ثلاثةَ أعداد. والطريقة المعتادة للقيام بذلك تكون باستخدام الإحداثيات الديكارتية، وسُمِّيَت بذلك نسبةً إلى مخترِعها ديكارت. (الذي يُؤكِّد أن الفكرة لاحَت له في حُلم.) في حالة البُعدَين، فإنك تبدأ باتجاهَين مُتعامِدَين. على سبيل المثال، يمكن أن يكون أحدُهما إلى اليمين، والآخر إلى أعلى مباشرةً، كما هو موضَّح في شكل ٥-١. بالنظر إلى أي نقطةٍ في المستوى، يمكنك الوصولُ إليها بالتحرُّك مسافةً مُعينة أفقيًّا (إذا تحرَّكتَ إلى اليسار، فاعتبِر أنك تحرَّكتَ مسافةً سالبةً في اتجاه اليمين) ثم الدوران 90 درجةً والتحرك مسافةً أخرى رأسيًّا. هاتان المسافتان تُعطيانك عددَين، وهذان العددان هما إحداثيَّا النقطةِ التي وصلت إليها. يوضح شكل ٥-١ النقاطَ التي لها الإحداثياتُ $(3,2)$ (ثلاثة إلى اليمين، واثنان لأعلى)، و$(-2,1)$ (اثنان إلى اليسار، وواحد لأعلى)، و$(1,-2)$ (واحد إلى اليمين، واثنان لأسفل). يصلح الإجراء نفسُه في حالة الأبعاد الثلاثة؛ أي: في الفراغ، بالضبط، باستثناء أنك تستخدمُ ثلاثة اتجاهات، مثل: إلى الأمام وإلى اليمين وإلى أعلى.

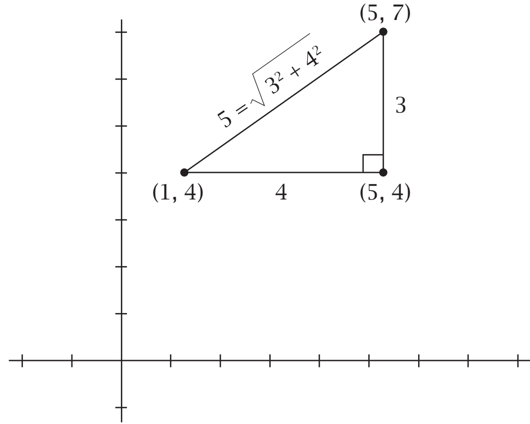
والآن، فلْنُغيِّر وجهةَ نظرنا قليلًا. بدلًا من تسمية العددَين (أو الثلاثة) إحداثيات نقطةٍ في الفراغ، لنقُل إن الأعداد هي النقطة. أي إنه بدلًا من القول إن «النقطة لها



شكل ٥-١: ثلاثة نقاط في المستوى الديكارتي

الإحداثيَّان $(5, 3)$»، لنقل إن «النقطة هي $(5, 3)$». ربما يُرى هذا على أنه مجردُ ملاءمةٍ لُغوية، لكنه في الحقيقة أكثرُ من ذلك. إنه استبدالُ نموذجٍ رياضي للفراغ بفراغٍ مادي حقيقي. يتكوَّن نموذجُنا الرياضي للفراغ الثنائيِّ البُعد من أزواجٍ من الأعداد (a, b). وعلى الرغم من أن هذه الأزواج من الأعداد ليست في ذاتِها نقاطًا في الفراغ؛ فإننا نُسمِّيها نقاطًا، لأننا نريد تذكيرَ أنفسنا بأن هذا هو ما تُمثله هذه الأعداد. وبالمثل، يمكن الحصولُ على نموذجٍ للفراغ الثلاثي الأبعاد، بتعيين الإحداثيات الثلاثة كاملةً (a, b, c)، ومرةً أخرى تسميتها نقاطًا. وهكذا، أصبح لدَينا الآن طريقةٌ واضحة لتعريف نقاطٍ في الفراغ الثُّمانيِّ الأبعاد. وهذه لا تعدو أن تكون أكثرَ من ثمانياتٍ من الأعداد الحقيقية. على سبيل المثال، إليك نقطتَين: $(1, 3, -1, 4, 0, 0, 6, 7)$ و$(5, \pi, -3/2, \sqrt{2}, 17, 89.93, -12, \sqrt{2} + 1)$.

لقد عرَّفتُ الآن نموذجًا رياضيًّا من نوعٍ ما، لكنه ليس جديرًا بعدُ بأن يُسمَّى نموذجًا لفراغٍ ثُمانيِّ الأبعاد؛ لأن كلمة «فراغ» تحمل معها كثيرًا من الدلالات الهندسية التي لم أصِفْها بعدُ بدلالةِ النموذج؛ الفراغ أكثرُ من مجردِ تجمعٍ هائل من النقاط المفردة. على سبيل المثال، نحن نتحدَّث عن المسافة بين زوجٍ من النقاط، وعن الخطوط المستقيمة، والدوائر، وأشكالٍ هندسية أخرى. فما نظائرُ هذه الأفكار في الأبعاد الكبيرة؟



شكل ٥-٢: حساب المسافات باستخدام نظرية فيثاغورس

تُوجَد طريقةٌ عامة للإجابة عن أسئلةٍ كثيرة من هذا النوع. على ضوءِ مفهومٍ مألوف من الفراغ الثنائيِّ البُعد والفراغ الثلاثيِّ الأبعاد، علينا أولًا أن نصفَ هذه الطريقة من حيث الإحداثيات، ثم نأمُلَ أن يُصبح تعميمُها على الأبعاد الأكثرِ واضحًا. لنرَ كيف نُطبِّق هذا على مفهوم المسافة.

بمعلوميةِ نقطتَين في المستوى، مثل $(1,4)$ و$(5,7)$، يمكن حساب المسافة بينهما على النحوِ الآتي. نبدأ بتكوين مثلثٍ قائم الزاوية باستخدام النقطة الإضافية $(5,4)$، كما هو موضَّح في شكل ٥-٢. وعندئذٍ، نُلاحظ أن الخطَّ الواصل بين النقطتَين $(1,4)$ و$(5,7)$ هو وتَر هذا المثلث، وهو ما يعني أنه يمكن حسابُ طوله باستخدام نظرية فيثاغورس. يبلغ طولا ضلعَيه الآخرَين $4 = 1 - 5$ و$3 = 4 - 7$، ومن ثمَّ يكون طولُ الوتر $5 = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{4^2 + 3^2}$. وعليه، فإن المسافة بين النقطتين هي 5. بتطبيق هذه الطريقة على أي زوج من النقاط (a,b) و(c,d)، نحصل على مثلثٍ قائم الزاوية، تقع فيه هاتان النقطتان على طرَفَي الوتر، ويكون طولا الضلعَين الآخرَين $|c - a|$ (هذا يعني الفرق بين c وa) و$|d - b|$. تُخبرنا نظرية فيثاغورس أن المسافة بين النقطتَين يمكن حسابها بالصيغة الآتية:

$$\sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

تُوجَد حجةٌ مُماثلة، ولكنها أكثرُ تعقيدًا إلى حدٍّ ما، تُستخدَم في الثلاثة الأبعاد، وتوضح أن المسافة بين النقاط (a, b, c) و(d, e, f) هي:

$$\sqrt{(d-a)^2+(e-b)^2+(f-c)^2}$$

بعبارةٍ أخرى، لحساب المسافة بين نقطتَين، فإننا نجمع مربَّعاتِ الفروق بين الإحداثيات المتناظِرة، ثم نأخذ الجذر التربيعي. (وفيما يلي التعليل باختصار. المثلث T الذي له الرءوس (a, b, c) و(a, b, f) و(d, e, f) هو مثلث قائم الزاوية عند (a, b, f). المسافة من (a, b, c) إلى (a, b, f) هي $|f-c|$، والمسافة من (a, b, f) إلى (d, e, f) هي $\sqrt{(d-a)^2+(e-b)^2}$. وهكذا ينطبق على المثلث T الاستنتاجُ المستخلَص من نظرية فيثاغورس.

إحدى السِّمات المميِّزة لهذه الجملة أنها لا تذكر حقيقةَ أن النقاط يُفترَض أنها ثلاثيةُ الأبعاد. وهكذا نكون قد وجدنا طريقةً لحساب المسافات في أيِّ عددٍ من الأبعاد. على سبيل المثال، المسافة بين نقطتَين $(1, 0, -1, 4, 2)$ و$(3, 1, 1, 1, -1)$ (تقعان في فراغٍ خماسي الأبعاد) هي:

$$\sqrt{(3-1)^2+(1-0)^2+(1-(-1))^2+(1-4)^2+(-1-2)^2}$$

$$=\sqrt{4+1+4+9+9}=\sqrt{27}$$

هذه الطريقةُ في تناوُل الموضوع مُضلِّلة نوعًا ما؛ لأنها تشير إلى أن هناك دائمًا مسافةً بين أي زوج من النقاط الخُماسية الأبعاد (تذكَّر أن النقطة الخماسية الأبعاد ما هي إلا متتابعةٌ من خمسةِ أعداد حقيقية) وأننا استنتجنا كيف نحسب هذه المسافات. ولكن، في واقع الأمر، ما فعلناه هو تعريفُ مفهوم المسافة. وليست هناك حقيقةٌ مادية تُجبرنا على أن نُقرِّر أن المسافة الخُماسية الأبعاد يجب أن تُحسَب بالطريقة الموضَّحة. ومن ناحيةٍ أخرى، من الواضح جدًّا أن هذه الطريقة هي التعميم الطبيعي لما قُمنا به في حالة البُعدَين والثلاثة الأبعاد، حتى إنه لَيبدو من الغريب تبنِّي أي تعريف آخر.

بمجرَّد تعريف المسافة، يمكننا البدء في تعميم مفاهيم أخرى. فمثلًا، من الواضح أن الكرة هي المكافئُ الثلاثيُّ الأبعاد للدائرة. فكيف ستبدو «الكرة» الرُّباعيةُ الأبعاد؟ كما في

حالة المسافة، يمكن الإجابة عن هذا السؤال إذا تمَكَّنا من وصف الشكلَين الثنائيِّ الأبعاد والثلاثيِّ الأبعاد. وهذا ليس بصعبٍ على الإطلاق: الدائرة والكرة يمكن وصفُهما بأنهما مجموعةُ كلِّ النقاط الواقعة على مسافةٍ ثابتة (نصف القطر) من نقطة مُعيَّنة (المركز). ولا مانع من استخدام التعريف نفسِه للكرة الرباعية الأبعاد، أو حتى لكرةٍ ذاتِ سبعةٍ وثمانين بُعدًا من هذا المنطلق. على سبيل المثال، يمكن تعريفُ كرةٍ رباعية الأبعاد يبلغ نصفُ قطرها 3 وحدات حول النقطة $(1,1,0,0)$ بأنها مجموعة كل النقاط (الرُّباعية الأبعاد) الواقعةِ على مسافة 3 وحدات من النقطة $(1,1,0,0)$. والنقطة الرباعية الأبعاد هي متتابعة (a,b,c,d) من الأعداد الحقيقية. وبذلك تكون المسافةُ بينها وبين النقطة $(1,1,0,0)$ (طبقًا للتعريف السابق) هي:

$$\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2+c^2+d^2}$$

وبِناءً على ذلك، يمكن أيضًا وصفُ هذه الكرة الرباعية الأبعاد بأنها مجموعةُ كلِّ الرباعيات (a,b,c,d) حيث

$$\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2+c^2+d^2}=3$$

على سبيل المثال، $(1,-1,2,1)$ إحدى هذه الرباعيات، وبذلك فإنها نقطةٌ في الفراغ الرباعي الأبعاد المُعطى.

يُوجَد مفهومٌ آخر يمكن تعميمه، وهو المربع في بُعدين، والمكعب في ثلاثة أبعاد. يوضح شكل ٥-٣ مجموعة كل النقاط (a,b) حيث تُكوِّن النقطتان a وb الواقعتان بين 0 و1 مربعًا يبلغ طولُ ضلعِه وحدة واحدة، وله الرءوس الأربعة $(0,0)$ و$(0,1)$ و(1,0) و$(1,1)$. في الثلاثة الأبعاد، يمكن تعريفُ المكعب بأخذ كلِّ النقاط (a,b,c) بحيث تقع a وb وc جميعُها بين 0 و1. وبذلك، يكون لدينا ثمانيةُ رءوس: $(0,0,0)$ و$(0,0,1)$ و$(0,1,0)$ و$(0,1,1)$ و$(1,0,0)$ و$(1,0,1)$ و$(1,1,0)$ و$(1,1,1)$. يمكن بالطبع استخدامُ تعريفاتٍ مماثلة في الأبعاد الأكبر. على سبيل المثال، يمكن الحصولُ على مكعبٍ سُداسي الأبعاد، أو بالأحرى شكل رياضي تنطبق عليه هذه التسمية، بأخذ كلِّ النقاط (a,b,c,d,e,f) بحيث تقع كلُّ الإحداثيات بين 0 و1. وستكون الرءوس هي

كلَّ النقاط التي كلُّ إحداثي لها هو 0 أو 1: من الملاحظ أن عدد الرءوس يتضاعف في كل مرة يُضَاف فيها بُعد، ومِن ثمَّ يوجد في هذه الحالة 64 رأسًا.

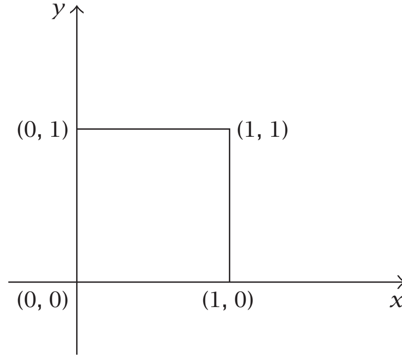
ثَمة الكثير الذي يمكن فعلُه بخلاف تعريف الأشكال. دعني أوضِّحْ هذا بإيجاز عن طريقِ حساب عدد الأحرف في مكعبٍ خماسيِّ الأبعاد. لا يتَّضح للوهلة الأولى المقصودُ بـ «الحرف»، ولكن يُمكننا استخلاصُ المعنى ممَّا يحدث في السِّياقَين الثنائيِّ الأبعاد والثلاثي الأبعاد: الحرف هو الخطُّ الواصل بين رأسَين متجاورَين، ويُعتبَر الرأسان متجاورَين إذا اختلفا في إحداثيٍّ واحد فقط. يكون الرأسُ عادةً في المكعَّب الخماسي الأبعاد نقطةً مثل $(0,0,1,0,1)$، وطبقًا للتعريف المذكور توًّا، فإن الرءوس المجاورة لهذا الرأس هي $(1,0,1,0,1)$ و$(0,1,1,0,1)$ و$(0,0,0,0,1)$ و$(0,0,1,1,1)$ و$(0,0,1,0,0)$. بوجه عام، كلُّ رأس له خمسة رءوس متجاورة، وبذلك نحصل على خمسة أحرفٍ منها. (سوف أترك للقارئ استخلاصَ مفهوم الخطِّ الواصل بين رأسَين متجاورَين، انطلاقًا ممَّا ذكرناه عن الثنائيِّ البُعد والثلاثيِّ الأبعاد. ولا داعي لتناولِ العملية الحسابية المتعلقة بذلك.) وبما أنه يوجد $32 = 2^5$ رأسًا، فإنه يبدو كما لو أن لدينا $160 = 5 \times 32$ حرفًا. ومع ذلك، فقد عدَدْنا كلَّ حرفٍ مرتَين — بواقع مرةٍ لكلٍّ من نقطتَي النهاية لهذا الحرف — ومن ثمَّ فإن الإجابة الصحيحة هي نصف العدد 160؛ أي 80.

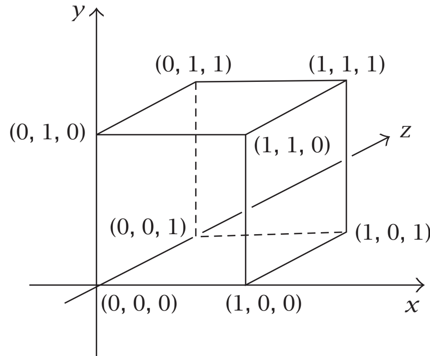
يمكن تلخيصُ ما نفعله هنا بأننا بصددِ تحويل الهندسة إلى جبر، حيث نستخدم الإحداثياتِ لتحويل مفاهيمَ هندسيةٍ إلى مفاهيمَ مُكافئة لها تُعْنى فقط بالعلاقات بين الأعداد. وعلى الرغم من أننا لا نستطيع تعميمَ الهندسة على نحوٍ مباشر، فإننا نستطيع تعميم الجبر، ويبدو أنه من المعقول أن نُسمِّيَ هذا التعميم الهندسةَ الكثيرةَ الأبعاد. ومن البديهيِّ أن الهندسة الخماسيةَ الأبعاد لا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بخبراتنا المباشرة كما في حالة الهندسة الثلاثية الأبعاد، لكنه أمرٌ لا يستحيل معه التفكيرُ فيها، ولا يحول دون أن تكون مُفيدةً كنموذج.

(٢) هل يمكن تصوُّر فراغ رباعي الأبعاد؟

في الواقع إنَّ هذه الجملة التي تبدو واضحةً في تقريرها بأنه يمكن تصوُّر العناصر الثلاثية الأبعاد، بخلاف العناصر الرباعية الأبعاد التي لا يمكن تصوُّرها، لا تصمد أمام إنعامِ النظر الدقيق. على الرغم من أن تصوُّر عنصرٍ ما يُشبه بالأحرى النظر إلى ذلك العنصر، فإنه تُوجَد أوجهُ اختلافٍ مهمة بين الخبرتَين. فمثلًا، إذا طُلِب إليَّ تصوُّرُ حجرةٍ مألوفة

لي، لكنها ليست مألوفةً بدرجة كبيرة، فلن أجد صعوبةً في فعل ذلك. لكن إذا طُرِحَت عليَّ بضعةُ أسئلة بسيطة عنها، مثل السؤال عن عدد الكراسي التي تحتويها أو لونِ الأرضية، فلن أتمكَّن غالبًا من الإجابة. هذا يوضح أنه، أيًّا كانت الصورة الذهنية، فإنها ليست تمثيلًا فوتوغرافيًّا.





شكل ٥-٣: مربع الوحدة ومكعب الوحدة

في سياق الرياضيات، الفارق المهمُّ بين إمكانية تصوُّرِ شيءٍ ما وعدم إمكانية تصوُّره هو أنه في الحالة الأولى يمكن للمرء إلى حدٍّ ما أن يُجيب عن الأسئلة بطريقةٍ مباشرة، بدلًا من التوقُّف برهةً وإجراءِ حساباتٍ في ذهنه. هذه القدرة على إعطاء إجاباتٍ مباشرة هي

أمرٌ نِسبي بطبيعة الحال، ولكن هذا لا ينتقِص من واقعيةِ تلك الإجابات. على سبيل المثال، إذا طُلِبَ أن أُحدِّد عدد الأحرف في مكعبٍ ثلاثي الأبعاد، فيُمكنني معرفةُ ذلك «بمجرد النظر»، حيث سأدرك أن هناك أربعةَ أحرف في الجزء العلوي، وأربعةَ أحرف في الجزء السفلي، وأربعةً من الجزء العلوي إلى الجزء السفلي، وهذا يعني وجودَ اثنَي عشَر حرفًا.

في الهندسة الكثيرة الأبعاد، تزداد صعوبةُ تمييزِ شيءٍ «بمجرد النظر»، ويُضطرُّ المرءُ غالبًا إلى الدخول في جِدالاتٍ أكثرَ مثلما حدَث عندما ناقشتُ السؤال المشابِهَ في العناصر الخماسية الأبعاد. ومع ذلك، فإنه ممكنٌ أحيانًا. على سبيل المثال، يمكنني التفكيرُ في مكعبٍ رباعي الأبعاد على أنه يتكوَّن من مكعَّبَين ثلاثيَّي الأبعاد مُتقابلَين، بحيث تتصل الرءوسُ المتقابِلة عن طريق الأحرف (في البُعد الرابع)، تمامًا كما يتكوَّن مكعبٌ ثلاثيٌّ الأبعاد من مربَّعَين متقابلَين، رءوسهما المتقابلة متَّصلة. وعلى الرغم من أنني ليس لديَّ تصوُّرٌ واضح عن الفَراغ الرباعي الأبعاد، فما زلتُ «أرى» أنَّ هناك اثنَي عشَر حرفًا لكلٍّ من المكعبَين الثلاثي الأبعاد، وثمانية أحرف تصل رءوسهما معًا. وهكذا، يكون عددُ الأحرف الإجمالي هو 32 = 8 + 12 + 12. وهكذا، أستطيع أن أُدرك «بمجرد النظر» أن المكعب الخماسي الأبعاد يتكوَّن من مكعبَين رباعيَّي الأبعاد، رءوسهما المتناظرةُ مُتصلة، مما يجعل عددَ الأحرف الإجماليَّ 80 = 16 + 32 + 32 (32 لكل مكعبٍ رباعيِّ الأبعاد و16 للأحرف بينهما)، وهذه بالضبط الإجابة التي حصلتُ عليها سابقًا. ومن ثمَّ، لديَّ المقدرة الأساسية على التصوُّر في الفراغ الرباعي الأبعاد والخماسي الأبعاد. (إذا كانت كلمة «تصوُّر» لا تروق لك، فيمكن أن تستخدِم كلمةً أخرى، مثل «تكوين فكرة».) والتصوُّر يكون أصعبَ بالطبع في حالة الثلاثة أبعاد — على سبيل المثال، لا أستطيع الإجابة مباشرةً عن أسئلةٍ تتعلق بما يحدث عند إجراءِ دورانٍ لمكعبٍ رباعي الأبعاد، في حينِ يُمكنني ذلك في حالة المكعب الثلاثي الأبعاد، لكنه أيضًا أسهلُ على نحوٍ واضح من تصوُّر ذي 53 بُعدًا، وهو ما لا يمكن تصوُّره إذا كان كِلاهما مُستحيلًا. تخصَّصَ بعضُ علماء الرياضيات في الهندسة الرباعية الأبعاد، وتطوَّرَت قدراتُهم على التصوُّر الرباعي الأبعاد بدرجةٍ كبيرة.

لهذه النقطة السيكولوجية أهميةٌ في الرياضيات تتجاوزُ الهندسة. ذلك أن إحدى المزايا التي يَجنيها المرءُ من تكريسِ حياته للأبحاث في مجال الرياضيات أنه عندما يكتسب الخِبرة، يجد أنَّ في مقدوره أن يعرف «بمجرد النظر» إجاباتِ كثيرٍ من الأسئلة التي ربما كانت تتطلَّب ساعةً أو ساعتَين من التفكير العميق، وهذه الأسئلة ليس بالضرورة أن تكون في مجال الهندسة. ومثالٌ أوليٌّ على ذلك الجملة $471 \times 638 = 638 \times 471$. يمكن

للمرء التحققُ من ذلك بإجراء عمليتَي ضربٍ مطوَّل مختلفتَين، والتحقق من أن الناتج فيهما لا يتغيَّر. ولكن، إذا فكَّر المرءُ بدلًا من ذلك في شبكةٍ من النقاط، مرتَّبة في مستطيل بُعداه 638×471، فإنه يستطيع أن يعرف أن الناتجَ الأول يجمع عددَ النقاط في كل صف، والثاني يجمع عددَ النقاط في كل عمود، وهذا بالطبع يجب أن يُعطيَنا الناتج نفسَه. ويلاحَظ أن الصورة الذهنية هنا تختلف تمامًا عن الصورة الفوتوغرافية: هل لك أن تتصوَّر حقًّا مُستطيلًا بُعداه 638×471 بدلًا من مستطيلٍ بُعداه 641×463؟ هل يمكنك عدُّ النقاط على طول الضلع القصير، لمجرد التحقق؟

(٣) ما فكرة الهندسة الكثيرة الأبعاد؟

شتَّانَ ما بين إقرار إمكانية فهم الهندسة الكثيرة الأبعاد وإدراك المغزى منها، وبين توضيح السبب الذي يجعلها موضوعًا جديرًا حقًّا بأن يُؤخَذ على مَحمل الجد. في موضعٍ سابق في هذا الفصل، زعمتُ أنه يمكن الاستفادة بها كنموذج، ولكن كيف يتأتَّى هذا، عِلمًا بأن الفراغ الفعليَّ الذي نعيشه ثلاثيُّ الأبعاد؟

الإجابة عن هذا السؤال بسيطةٌ إلى حدٍّ ما. كان من بين الموضوعات التي تناولتُها في الفصل الأول أن النموذج يمكن أن تكون له استخداماتٌ كثيرة مختلفة. بل إن الهندسة الثنائية الأبعاد والثلاثية الأبعاد تُستخدَمان لأغراضٍ عدَّة، بخلاف النَّمْذجة المباشرة للفراغ المادي. على سبيل المثال، نحن نُمثِّل دائمًا حركةَ جسمٍ ما بإنشاءِ رسمٍ بياني يُسجِّل المسافة التي قطعَها في نقاطٍ زمنية مختلفة. وسيكون هذا الرسم البياني عبارةً عن منحنًى في المستوى، والخصائص الهندسية للمنحنى تُناظر المعلوماتِ المتعلقةَ بحركة الجسم. لماذا تكون الهندسة الثنائية الأبعادِ مناسبةً لنمْذَجة هذه الحركة؟ لأن هناك عددَين مُهمَّين — الزمن المنقضي والمسافة المقطوعة — وكما قلت، يمكن للمرء أن يُفكِّر في الفراغ الثنائي الأبعاد على أنه تجمُّعٌ من كل أزواج الأعداد.

يعطينا ذلك لمحةً عن السبب في أن الهندسة الكثيرةَ الأبعادِ يمكن أن تكون مفيدة. قد لا يُوجَد أيُّ فراغ كثيرِ الأبعاد في مكانٍ ما في الكون، لكن يُوجَد العديد من الحالات التي تقتضي منا التعاملَ مع مجموعاتٍ من أعدادٍ كثيرة. سأصفُ حالتَين بإيجازٍ شديد، وينبغي أن يتَّضح بَعدهما أن ثمة حالاتٍ أخرى كثيرة.

لنفترض أني أُريد أن أصفَ موضع كرسيٍّ. إذا كان الكرسيُّ عموديًّا، فإنه يمكن تحديدُ موضعِه عن طريق النقطتَين اللتَين تلتقي فيهما اثنَتان من أرجُلِه بالأرض. ويمكن وصفُ كلٍّ من هاتين النقطتَين بإحداثيَّين. والنتيجة هي أنه سيكون لدينا أربعةُ أعداد يمكن استخدامها لوصفِ موضع الكرسي. ولكن، هذه الأعداد الأربعة مُترابطة؛ لأن المسافة بين نهايات الأرجُلِ ثابتة. إذا كانت هذه المسافة هي d، وكانت الأرجلُ تلتقي بالأرض عند النقطتَين (p,q) و(r,s)، فإن $(p-r)^2+(q-s)^2=d^2$، طبقًا لنظرية فيثاغورس. وهذا يضع شرطًا على p وq وr وs، يمكن وصفه بالمُصطلحات الهندسية على النحو التالي: النقطة (p,q,r,s)، التي تنتمي إلى الفراغ الرباعي الأبعاد، أُجبِرَت على أن تقع في «سطح» ثلاثيِّ الأبعاد. وهكذا يمكن تحليل نُظم ماديةٍ أكثرَ تعقيدًا بطريقةٍ مماثلة، وستُصبح الأبعاد أكثرَ بكثير.

الهندسة المتعددة الأبعاد لها أهميةٌ كبيرة أيضًا في مجال الاقتصاد. إذا تساءلت — مثلًا — عمَّا إذا كان من الحِكمة أن تشتريَ أسهُمًا في شركةٍ ما، فإن كثيرًا من المعلومات التي تساعدك في اتخاذ قرارك تأتي في هيئة أرقام — حجم القوة العاملة، قِيَم الأصول المختلفة، تكلفة الموادِّ الخام، معدَّل الفائدة، وهكذا. يمكن التفكيرُ في هذه الأعداد، التي تُعامَل على أنها مُتتابعة، بوصفها نقطةً في فراغٍ معيَّن كثيرِ الأبعاد. وما تودُّ عمله، ربما بتحليلِ كثيرٍ من الشركات الأخرى المشابهة، هو تحديدُ منطقةٍ بعينها في هذا الفراغ، وهي المنطقة التي سيكون شراءُ أسهمٍ فيها فكرةً سديدة.

(٤) البُعد الكَسْري

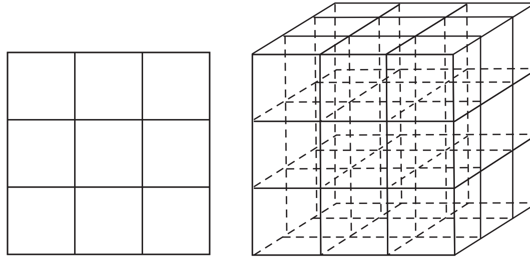
إذا كان هناك شيءٌ ما بدا واضحًا من المناقشة حتى الآن، فهو أن أبعاد أيِّ شكلٍ دائمًا ما تكون أعدادًا صحيحة. فماذا يمكن أن يعنيَ القولُ بأننا نحتاج إلى بُعدَين ونصفٍ لتعيين نقطةٍ ما، حتى لو كانت نقطة رياضية؟

قد تبدو هذه الحُجة مقنِعة، لكننا واجَهْنا صعوبةً مماثلة جدًّا قبل تعريف العدد $2^{3/2}$ في الفصل الثاني، واستطعنا التحايل على الأمر باستخدام الطريقة المجرَّدة. هل من الممكن فعلُ شيءٍ مماثلٍ فيما يخصُّ البُعد؟ إذا أردنا ذلك، فعَلينا إيجادُ خاصيةٍ ما مرتبطةٍ بالبُعد لا تستلزم مباشرةً أن يكون عددًا صحيحًا. وهذا يستبعد أيَّ شيءٍ له علاقةٌ بعدد الإحداثيات، الأمر الذي يبدو أنه وثيقُ الصلة بفكرةِ البُعد حتى إنه يصعُب معه التفكيرُ

في أي شيءٍ آخر. ومع ذلك، تُوجَد خاصيةٌ أخرى ذكَرْناها في بداية هذا الفصل يمكن أن تُعطينا ما نحتاج إليه بالضبط.

أحد الجوانب المهمَّة في الهندسة، الذي يختلفُ باختلاف البُعد، القاعدةُ التي تُحدِّد ما يحدث في قياسات شكلٍ ما عند تمديده بمُعاملٍ مقداره t في جميع الاتجاهات. والمقصود بالقياسات هنا هو الطول، أو المساحة، أو الحجم. في البُعد الواحد، تُضرَب القياسات في t أو t^1، وفي البُعدَين تُضرب في t^2، وفي الثلاثة أبعاد تُضرب في t^3. وهكذا، يُخبرنا الأُسُّ المرفوع إليه t ببُعد الشكل.

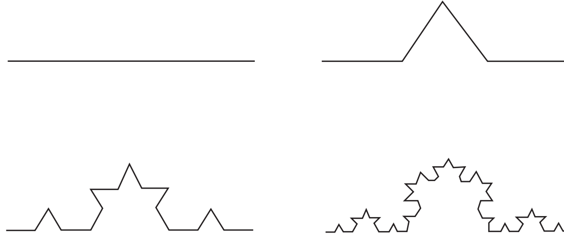
حتى الآن لم ننجح تمامًا في استبعاد الأعداد الصحيحة من الصورة؛ لأن العددَين 3 و4 متضمَّنان في لفظتَي «المساحة» و«الحجم». ولكن، يمكن استكمالُ العمل من دون هاتين الكلمتَين كما يلي. لماذا تكون مساحةُ المربع الذي طول ضلعِه 3 وحدات تسعةَ أضعافِ مساحة المربع الذي طول ضلعه وحدة واحدة؟ السبب أنه يمكننا تقسيمُ المربع الأكبرِ إلى تسعةِ مربَّعات متطابقة مع المربع الأصغر (انظر شكل ٥-٤). وبالمثل، فإن المكعَّب الذي أبعاده $3 \times 3 \times 3$، يمكن تقسيمه إلى 27 مكعبًا بالأبعاد $1 \times 1 \times 1$. وهكذا، يمكننا القولُ إن المكعب ثلاثيَّ الأبعاد لأنه في حال تمديدِه بمعامل t، حيث t عدد صحيح أكبرُ من 1، يمكن تقسيم المكعب الجديد إلى عدد t^3 نسخة من المكعب القديم. ويلاحظ أن كلمة «حجم» لم تظهر في الجملة الأخيرة.



شكل ٥-٤: تقسيم مربع إلى عدد $3^2 = 9$ من المربعات الأصغر، وتقسيم مكعبٍ إلى عدد $3^3 = 27$ من المكعبات الأصغر

ربما نتساءل الآن: أيُوجَد شكلٌ يمكننا أن نُضاعفه كما سبق، ونحصل على ناتجٍ لا يكون عددًا صحيحًا؟ الإجابة نعم. ويُعرَف أبسطُ الأمثلة على ذلك باسم مُنحنى نُدْفة الثلج

لكوخ. هذا المنحنى لا يمكن وصفُه بطريقةٍ مباشرة: بدلًا من ذلك، فإنه يُعرَّف بوصفه نهايةَ العملية التالية. ابدأ بقطعة مستقيمة، وليكن طولها — مثلًا — 1. ثم قسِّمْها إلى ثلاثة أجزاء متساوية، واستبدل بالجزء الأوسط الضِّلعَين الآخرَين للمثلث المتساوي الأضلاع، الذي يكون الجزءُ الأوسط قاعدةً له. ستكون النتيجة شكلًا مكوَّنًا من أربع قطعٍ مستقيمة، طول كلٍّ منها يساوي 3. قسِّم كلًّا من هذه القطع المستقيمة إلى ثلاثة أجزاء متساوية، ومرةً أخرى استبدل بكلِّ جزءٍ أوسطَ الضلعَين الآخرَين لمثلثٍ متساوي الأضلاع. وهكذا، سيكون لدينا شكلٌ مكوَّن من 16 قطعة مُستقيمة، طول كلٍّ منها $1/9$. وتستمرُّ العملية على هذا المنوال: الخطوات القليلة الأولى موضَّحة في شكل ٥-٥. ليس من الصعب أن نُبرهن بدقةٍ على أن هذه العملية ستؤدي إلى شكلٍ محدود، كما تُشير الصور، وأن هذا الشكل هو منحنى نُدفة الثلج لكوخ. (يبدو المنحنى أشبهُ بنُدفةِ الثلج إذا أخذتَ ثلاث نسخٍ منه، ووضعتَها معًا حول مثلث.)



شكل ٥-٥: إنشاء منحنى ندفة الثلج لكوخ

يتَّسم منحنى ندفة الثلج لكوخ بعدةِ سِماتٍ مهمة. ويَعْنينا منها هنا أنه يمكن إنشاءُ نسخٍ أصغرَ من المنحنى نفسِه. ومرةً أخرى، يمكن رؤية ذلك في الصورة: إنها تتكون من أربع نسخ، وكلُّ نسخة هي تصغيرٌ للشكل الكلي بمعامل مقداره $1/3$. لنرَ الآن ما تُخبرنا به الصورة فيما يخص البُعد.

إذا كان الشكل له البُعد d، فمن المفترض عند تصغيره بمعاملٍ مقداره $1/3$ أن تقلَّ قياساتُ معاملٍ مقداره 3^d. بما أن النسخ الأربع لازمةٌ لمنحنى ندفة الثلج لكوخ، فلا بد أن يكون بُعده d عددًا حيث $3^d = 4$. وبما أن $3^1 = 3$ و$3^2 = 9$، فهذا يَعني أن d يقع

بين 1 و2، ومن ثمَّ فهو عددٌ غير صحيح. في الواقع إنه يساوي $\log_3 4$، وهو ما يساوي تقريبيًّا 1.2618595.

تستند هذه العملية الحسابية إلى حقيقةِ أن منحنى ندفة الثلج لكوخٍ يمكن تقسيمه إلى نُسَخ أصغر منه، وهي سِمةٌ غير عادية بالمرة، حتى إن الدائرة لا تتميَّز بهذه السِّمة. ومع ذلك، يمكن تطوير الفكرة السابقة وصياغةُ تعريفٍ للبُعد يمكن تطبيقه على نطاقٍ أوسع كثيرًا. وعلى غِرار استخداماتنا الأخرى للطريقة المجردة، لا يعني هذا أننا اكتشفنا «البُعد الحقيقي» لمنحنى نُدفة الثلج لكوخٍ وغيرِه من الأشكال الغريبة المشابهة، لكن كل ما هنالك أننا توصَّلنا إلى التعريف الممكنِ الوحيد المتَّسِق مع بعضِ خصائصَ بعينها. وفي الواقع، تُوجَد طرقٌ أخرى لتعريف البُعد، تعطي إجاباتٍ مختلفة. على سبيل المثال، منحنى ندفة الثلج لكوخٍ له «بُعدٌ طوبولوجي» يساوي 1. ويُعزى ذلك، بوجهٍ عام، إلى إمكانية تقسيمه — شأنه شأن الخط المستقيم — إلى جُزأَين غير متصلَين بإزالة أيٍّ من نقاطه الداخلية.

يُلقي هذا الأمرُ على نحوٍ مثير للاهتمام الضوءَ على عمليتَي التجريد والتعميم المتناظرتَين. أشرتُ إلى أن تعميم مفهومٍ ما يستلزم بدوره تحديدَ بعض الخصائص المرتبطة به وتعميمها. وتُوجَد غالبًا طريقةٌ بديهية وحيدة للقيام بذلك، إلا أنه أحيانًا ما تؤدي مجموعاتٌ مختلفة من الخصائص إلى تعميماتٍ مختلفة، وأحيانًا يكون وجودُ أكثرَ من تعميم واحدٍ مُثمِرًا.

الفصل السادس

الهندسة

ربما يكون كتاب «الأصول» لإقليدس، الذي ألَّفه نحو عام 300 قبل الميلاد، الكتاب الأكثر تأثيرًا في الرياضيات على مرِّ التاريخ. وعلى الرغم من أن إقليدس عاشَ قبل أكثرَ من ألفَي عامٍ مضَت، فإنه كان من نواحٍ كثيرةٍ أولَ عالِم رياضياتٍ حديثة على نحوٍ يمكن تمييزه — أو على الأقل أولَ عالِم رياضيات حديثة نعرفُه. وعلى وجه الخصوص، فقد كان أولَ مؤلِّفٍ يَستخدم منهجَ المُسلَّمات بطريقةٍ منهجية، حيث استهلَّ كتابه بخمسِ مُسلَّماتٍ، واستنتجَ منها مجموعةً هائلة من النظريات الهندسية. فالهندسة التي يعهدها معظمُ الناس، إن كانوا على درايةٍ بها بأي حال، هي هندسة إقليدس، إلا أنه على مستوى البحث كان لكلمةِ «هندسة» تعريفٌ أوسعُ نطاقًا بكثير: معظم علماء الهندسة حاليًّا لا يقضون جُلَّ وقتِهم مع المسطرة والفِرْجار.

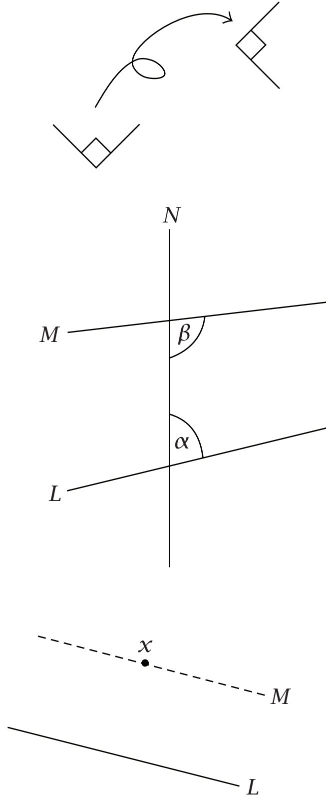
(١) الهندسة الإقليدية

نتناول فيما يلي مُسلَّمات إقليدس. وإنني لَأسير هنا وَفْق النهج المعتاد، وأستخدمُ مصطلح «خط مستقيم» للمستقيم الذي يمتدُّ بلا نهاية في كِلا الاتجاهَين. وسيكون معنى «القطعة المستقيمة» مستقيمًا له نقطةُ بداية ونقطة نهاية.

(١) أيُّ نقطتَين يمكن توصيلُهما بواسطة قطعةٍ مستقيمة.

(٢) أي قطعةٍ مستقيمة يمكن مدُّها لتُصبح خطًّا مستقيمًا.

(٣) بمعلومية أيِّ نقطة P وأيِّ طول r، تُوجَد دائرة نصفُ قُطرها r ومركزها النقطة P.



شكل ٦-١: المسلَّمة الرابعة لإقليدس ومِثالان على المسلَّمة الخامسة

(٤) كل زاويتَين قائمتَين متطابقتان.

(٥) إذا قطعَ N قطعتَين مُستقيمتَين L وM، وإذا كان مجموعُ قياسَي الزاويتَين الداخليتَين على إحدى جانبي N أقلَّ من مجموعِ قياسَي زاويتَين قائمتَين، فإن المستقيمَين L وM يتقاطعان حتمًا على ذلك الجانب من N.

يوضِّح شكلُ ٦-١ المسلَّمتَين الرابعةَ والخامسة. تعني المسلَّمة الرابعة أنك تستطيع تحريكَ أي زاويةٍ قائمة حتى تنطبق تمامًا على أيِّ زاويةٍ قائمة أُخرى. أما فيما يخصُّ المسلَّمة الخامسة، فإنه نظرًا إلى أن مجموع قياسَي الزاويتَين المُسمَّاتَين α وβ وأقلُّ من

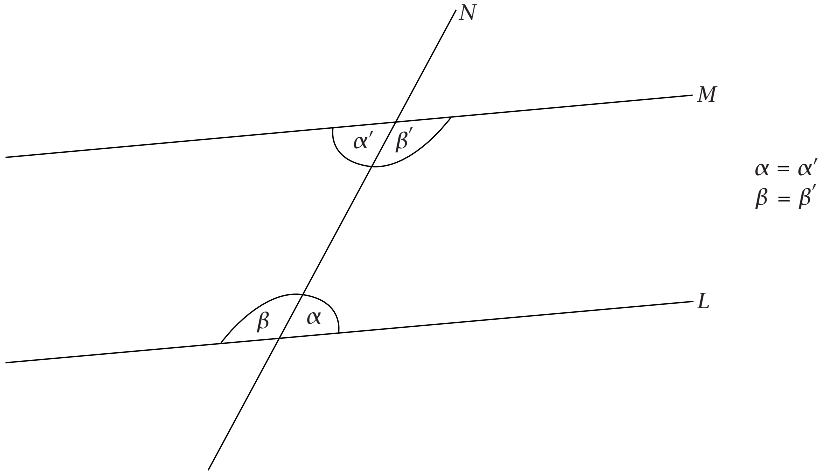
180 درجة، فإنها تُخبرنا أن المستقيمَين L وM يتقاطعان في موضعٍ ما على يمين N. تكافئ المسلَّمة الخامسة ما يُسمَّى «مسلَّمة التوازي»، التي تؤكِّد أنه بمعلوميةِ أي مستقيم L وأي نقطة x لا تقع على L، يُوجَد مستقيمٌ واحد فقط M يمر بالنقطة x ولا يتقاطع أبدًا مع المستقيم L.

استخدم إقليدس هذه المسلَّماتِ الخمسَ لتأسيس علم الهندسة بكاملِ صورته كما كانت مفهومةً آنَذاك. فيما يلي، على سبيل المثال، ملخَّصٌ يُوضح كيفيةَ إثبات النتيجةِ المعروفة جيدًا أنَّ مجموع (قياسات) زوايا المثلَّث يساوي 180 درجة. تتمثل الخطوةُ الأولى في إثبات أنه إذا كان لدَينا مستقيم N يتقاطع مع مُستقيمَين متوازيَين L وM، فإن الزوايا المتقابلة تكون متساوية. أي إنه في شيءٍ مثل شكل ٦-٢ يجب أن نحصل على $\alpha = \alpha'$ و$\beta = \beta'$. وهذه إحدى النتائج المترتِّبة على المسلَّمة الخامسة. أولًا، تخبرنا أن $\alpha' + \beta$ أقلُّ من 180، وإلا لتقاطعَ المستقيمان L وM (في موضعٍ ما إلى يَسار المستقيم N في الشكل). بما أن α وβ يُكوِّنان معًا خطًّا مستقيمًا، $\beta = 180 - \alpha$، فإنه يترتَّب على ذلك أن $\alpha' + (180 - \alpha)$ يساوي على الأقل 180، وهو ما يعني أن α' أكبر من α أو تُساويها. وطبقًا لهذه الحجة نفسِها، فإن $\alpha + \beta' = \alpha + (180 - \alpha')$ يجب أن تُساويَ على الأقل 180، ومن ثمَّ فإن α تكون أكبرَ من α' أو تساويها. الطريقة الوحيدة لحدوث ذلك أن تكون α وα' متساويتَين في القياس. وبما أن $\beta = 180 - \alpha$ و$\beta' = 180 - \alpha'$، فإن $\beta = \beta'$ كذلك.

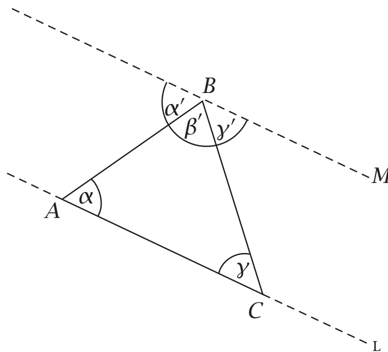
لنفترِض الآن أن ABC مثلَّث، وأن الزوايا عند A وB وC هي α وβ وγ وعلى الترتيب. طبقًا للمُسلَّمة الثانية، يمكن مدُّ القطعة المستقيمة AC لتُصبح المستقيم L. تخبرنا مسلَّمة التوازي أنه يُوجَد مستقيم M يمرُّ بالنقطة B لا يتقاطع مع L. لنفترض أن α' وβ' هما الزاويتان الموضَّحتان في شكل ٦-٣. طبقًا لما أثبتناه توًّا، فإن $\alpha' = \alpha$ و$\gamma' = \gamma$. ومن الواضح أن $\alpha' + \beta + \gamma' = 180$، بما أن الزوايا الثلاث α' وβ' وγ' تُكوِّن معًا خطًّا مستقيمًا. وعليه، فإن $\alpha + \beta + \gamma = 180$، وهو المطلوب إثباته.

بماذا يُخبرنا هذا البرهانُ عن الحياة اليومية؟ يبدو أن أحد الاستنتاجات المهمَّة أنه إذا عُيِّنَت ثلاثُ نقاط A وB وC في الفراغ، وقيست زوايا المثلث ABC بعناية، فإن مجموعها يساوي 180 درجة. ويتأكَّد ذلك بتجرِبةٍ بسيطة: ارسم مثلثًا على قطعةٍ من الورق، ثم قُصَّه بعنايةٍ قدْرَ الإمكان، وقَطِّعه إلى ثلاثة أجزاء يحتوي كلٌّ منها على أحد أركان المثلث،

ثم ضَع الأركان الثلاثة قريبًا بعضُها من بعض، ولاحِظ أن الزوايا تُكوِّن بالفعل خطًّا مستقيمًا.



شكل ٦-٢: إحدى النتائج المترتبة على المسلَّمة الخامسة لإقليدس



شكل ٦-٣: إثباتُ أن مجموع زوايا المثلث يُساوي 180 درجة

إذا كنتَ مقتنعًا الآن بأنه من غير المتصوَّر أن يُوجَد مثلث ماديٌّ مجموعُ زواياه لا يساوي 180 درجة، فأنت في صحبةٍ جيدة؛ لأنه الاستنتاج الذي توصَّل إليه الجميع بدءًا من إقليدس عام 300 قبل الميلاد وحتى إيمانويل كانط في نهاية القرن الثامن عشر. وفي الواقع، كان كانط مقتنعًا جدًّا بذلك حتى إنه خَصَّص جزءًا من كتابه «نقد العقل الخالص» للسؤال عن كيف يُمكن للمرء أن يكون على يقينٍ تام من أن الهندسة الإقليدية كانت صحيحة.

ولكن، كان كانط مخطئًا في ذلك؛ بعدها بنحو ثلاثين عامًا، تمكَّن عالِمُ الرياضيات الكبير كارل فريدريش جاوس أن يضَع تصوُّرًا لهذا المثلث، ونتيجةً لذلك قاسَ فعلًا زوايا المثلثِ المكوَّنِ بواسطة قِمَم جبال هوهنهاجن وإنسلبرج وبروكن في مملكة هانوفر، لاختبارِ إذا ما كان مجموعُها يساوي فعلًا 180 درجة. (هذه القصة مشهورة، لكنها — بأمانةٍ — تجعلني أشكُّ فيما إذا كان يُحاول بالفعل اختبارَ الهندسة الإقليدية.) هذه التجربة لم تكن حاسمة؛ لأنه من الصعب قياسُ الزوايا بدقةٍ كافية، لكن المثير للاهتمام فيما يخصُّ هذه التجرِبة ليس نتيجتَها، ولكن حقيقة أن جاوس تكبَّد عناءَ إجرائها من الأساس. فما الخطأ المحتمَل أن يجدَه في البرهان الذي طرَحتُه توًّا؟

في الحقيقة ليس هذا بالسؤال المناسب طرحُه، بما أن البرهان صحيح. ولكن، بما أنه يستند إلى المسلَّمات الخمس لإقليدس، فإنه لا يقتضي ضِمنًا أيَّ علاقةٍ بالحياة اليومية ما لم تكن هذه المسلَّماتُ صحيحةً في الحياة اليومية. ومن ثمَّ، فإنه بالتشكيك في صحةِ مُسلَّمات إقليدس، يمكن التشكيك في مقدمة البرهان.

لكن أيُّ المسلَّمات تبدو أقلَّ مثارًا للشك؟ من الصعب أن نجد خطأً في أيِّ مُسلَّمة منها. إذا أردتَ توصيل نقطتَين في العالم الحقيقيِّ بواسطة قطعةٍ مستقيمة، فكلُّ ما عليك فعلُه هو أن تشدَّ قطعةً من الخيط بحيث تمرُّ بالنقطتَين. وإذا أردتَ مدَّ هذه القطعةِ المستقيمة لتُصبح خطًّا مستقيمًا، فيُمكنك استخدامُ شعاعٍ من الليزر بدلًا من ذلك. وبالمثل، يبدو أنه من غير الصعب إيجادُ دائرة بأي نصفِ قطر وأي مركزٍ مرغوب، ويتَّضح بالخبرة والتجرِبة أنك إذا أخذتَ رُكنَين من ورقةٍ بزاويتَين قائمتَين، فإنه يُمكنك وضعُ أحدهما فوق الآخر بحيث ينطبقان تمامًا. وفي النهاية، ما الذي يمنع مستقيمَين من الامتداد إلى مسافةٍ لا نهائية إلى الأبد، كالحال في قضيبَي السككِ الحديدية اللذين يمتدَّان بطولٍ لا نهائي؟

(٢) مسلَّمة التوازي

تاريخيًّا، كانت مُسلَّمة التوازي هي المسلَّمةَ الأكثر مَثارًا للشك، أو على الأقل للبلبلةِ والجدل. ذلك أنها أكثرُ تعقيدًا من المُسلَّمات الأخرى، وتتضمَّن مفهومَ اللانهاية بصفةٍ أساسية. أليس من الغريب، عند إثبات أن مجموعَ زوايا المثلث تساوي 180 درجة، أن يستند البرهان بالضرورة إلى ما يحدث في أرجاء الفضاء الخارجي الفسيح؟

دعنا نختبر مسلَّمة التوازي بمزيدٍ من الدقة، ونحاول أن نفهم سببَ أنها تبدو صحيحةً بطريقةٍ بديهية. ربما تدور في أذهاننا البراهينُ التالية.

(١) لنفترض أنَّ لدينا مستقيم L وx نقطةٌ لا تقع عليه، كل ما عليك فعلُه لرسمِ مستقيم مُوازٍ يمر بالنقطة x هو أن تختار مستقيمًا يمرُّ بالنقطة x ويسير في الاتجاه نفسِه الذي يسير فيه المستقيم L.

(٢) لنفترض أنه تُوجَد نقطة أخرى ولتكُن y، على الجهة نفسِها التي بها النقطةُ x من المستقيم L وعلى المسافة نفسها من L. صِل x وy بقطعةٍ مستقيمة (مسلَّمة ١)، ثم مُدَّ هذه القطعة المستقيمة لتصبح مستقيمًا كاملًا، ولْيكُن M (مسلَّمة ٢). وعليه، فإن M لن يتقاطعَ مع L.

(٣) لنفترِض أن M هو المستقيمُ المتكوِّن من جميعِ النقاط الواقعة على الجهة نفسِها من المستقيم L التي تقع عليها x وعلى المسافة نفسِها. من الواضح أن هذا المستقيم لا يتقاطعُ مع L.

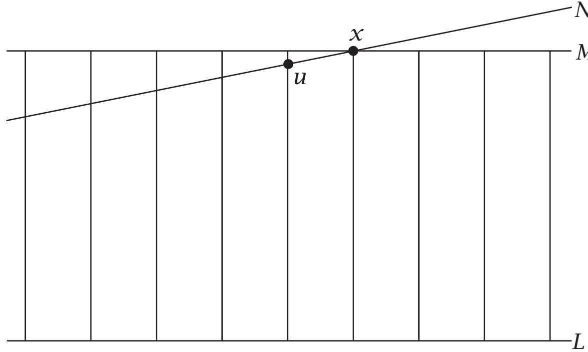
تتعلَّق هذه البراهينُ حتى الآن بوجودِ مستقيم مُوازٍ للمستقيم L. ونتناول فيما يلي برهانًا أكثرَ تعقيدًا يهدف إلى إثباتِ إمكانية وجودِ مستقيمٍ واحد كهذا على أقصى تقدير، وهو الجزء الثاني من مسلَّمة التوازي.

(٤) صِل المستقيمَين L وM بقِطَعٍ مستقيمة عموديَّة على مسافاتٍ متساوية (وهو ما يُعطينا قُضبان السكك الحديدية الموضحة في شكل ٦-٤) بحيث تمرُّ إحدى هذه القطع المستقيمة بالنقطة x. والآن، لنفترضْ أنَّ N مستقيمٌ آخَرُ يمرُّ بالنقطة x. على أحد جانبَي x، يجب أن يقع المستقيمُ N بين L وM، وبذلك فإنه يتقاطع مع القطعة المستقيمة التالية في نقطة، ولْتكُن u، التي تقع بين L وM. لنفترض أن في هذا المثال u تقع على مسافة 1% من الطولِ الإجماليِّ للقطعة المستقيمة من M إلى L. إذن، سوف يقطع المستقيمُ N القطعةَ المستقيمة التالية في نقطةٍ على مسافة 2% من الطول الإجمالي، وهكذا. وعليه، فإنه

بعد 100 قطعة مستقيمة، سوف يتقاطع N مع L. وبما أن كل ما افترضناه بخصوص N أنه ليس M، فإنه يترتب على ذلك أن M هو المستقيم الوحيد المارُّ بالنقطة x الذي لا يتقاطع مع المستقيم L.

وأخيرًا، نتناول فيما يلي برهانًا يُثبت وجودَ مستقيم موازٍ واحد فقط للمستقيم L يمر بنقطةٍ مُعطاة.

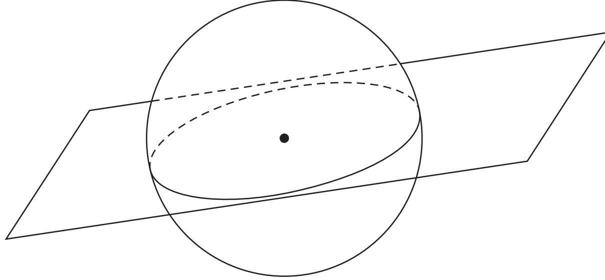
(٥) يمكن وصف نقطةٍ في المستوى بواسطة الإحداثيات الديكارتية. للمستقيم (غير الرأسي) L معادلةً بالصيغة: $y = mx = c$. بتغيير c نُحرِّك L لأعلى ولأسفل. وبديهيًّا، فإن أيَّ مُستقيمَين ناتجَين لا يمكن أن يتَقاطعا بِناءً على ذلك، وكل نقطة تكون مُتضمَّنةً في أحدِهما فقط.



شكل ٦-٤: أُحادية المستقيمات المتوازية

يُلاحَظ أن ما فعلتُه توًّا أنني حاولتُ إثبات مسلَّمة التوازي، وهذا بالضبط ما حاولَ كثيرٌ من علماء الرياضيات قبل القرن التاسع عشر أن يفعلوه. كان أقصى ما أرادوه هو استنتاجَ هذه المسلَّمةِ من المُسلَّمات الأربع الأخرى، ومن ثَمَّ إثبات أنه يمكن الاستغناءُ عنها. ولكن، لم يتمكَّن أحدٌ من ذلك. المشكلة في البراهين التي طرَحتُها توًّا، وأخرى مثلها، أنها تتضمَّن افتراضاتٍ ضِمنية، وعندما يحاول المرءُ أن يجعلها صريحة، يرى أنها ليست نتائجَ بديهيةً للمُسلَّمات الأربع الأولى لإقليدس. وعلى الرغم من أنها معقولة، فإنها ليست أكثرَ معقوليةً من مسلَّمة التوازي نفسِها.

(٣) الهندسة الكُروية



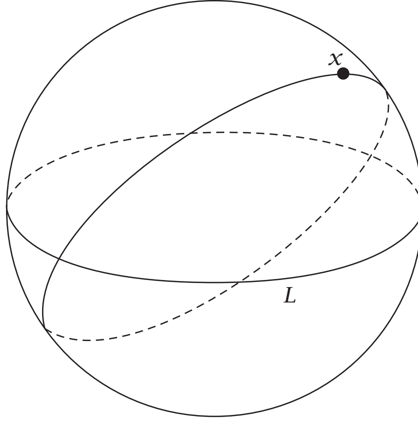
شكل ٦-٥: دائرة عظمى

من الطرق الجيدة للوقوف على هذه الافتراضات الضِّمنية ومناقشتِها بوضوحٍ: اختبارُ البراهين نفسِها المُطبَّقة في سياقٍ مختلف، وتحديدًا في سياقٍ تكون فيه مُسلَّمة التوازي غيرَ صحيحة قطعًا. وبأخذِ هذا في الاعتبار، دَعْنا نُفكر لحظةً في سطح الكرة.

لا يتَّضح على الفور ما نقصدُه بأنَّ مُسلَّمة التوازي لا تنطبق على سطح الكرة؛ لأن سطح الكرة لا يتضمَّن خطوطًا مستقيمةً على الإطلاق. سوف نتغلَّب على هذه الصعوبة بتطبيقِ فكرةٍ ذات أهميَّة جوهرية في الرياضيات. تتمثَّل هذه الفكرة، التي هي مثالٌ تطبيقي مُتعمِّق على الطريقة المجرَّدة، في إعادة تفسير مفهوم الخطِّ المستقيم، بحيث يتضمَّن سطحُ الكرة بالفعل خطوطًا مُستقيمة في نهاية الأمر.

يُوجَد في الواقع تعريفٌ بسيط مألوف: القطعة المستقيمة من x إلى y هي أقصرُ مسار من x إلى y يقع بأكمله داخلَ سطح الكرة. يمكن للمرء أن يتخيَّل x وy على أنهما مدينتان، والقطعة المستقيمة هي أقصرُ مسارٍ تسلكه الطائرة. هذا المسار سيكون جزءًا من «دائرةٍ عُظمى»، وهي دائرة نحصل عليها برسمِ مستوًى يمرُّ بمركز الكرة، وتحديد الموضع الذي يقطع فيه هذا المستوى السطحَ (شكل ٦-٥). ومثالًا على الدائرة العُظمى خطُّ الاستواء للكرة الأرضية (التي، لأغراضٍ تتعلق بالمناقشة، سأعتبرها كرةً تامَّة). بالنظر إلى الطريقة التي عرَّفنا بها القطعةَ المستقيمة، فإن الدائرة العظمى تُقدِّم تعريفًا جيدًا لمفهوم «الخط المستقيم».

إذا أخذنا بهذا التعريف، فإن مُسلَّمة التوازي تكون خطأً بالتأكيد. على سبيل المثال، ليكُن L هو خط الاستواء للكرة الأرضية، ولتكن x نقطةً في نصف الكرة الشمالي. من السهل ملاحظةُ أن أيَّ دائرةٍ عُظمى تمرُّ بالنقطة x سيقع نصفها في النصف الشمالي بينما يقع نصفها الآخرُ في النصف الجنوبي، حيث تقطع خط الاستواء في نقطتَين متقابلتَين تمامًا (انظر شكل ٦-٦). بعبارةٍ أخرى، لا يُوجَد مُستقيم (وهو ما زلتُ أعني به الدائرةَ العُظمى) يمرُّ عبر النقطة x لا يتقاطع مع المستقيم L.

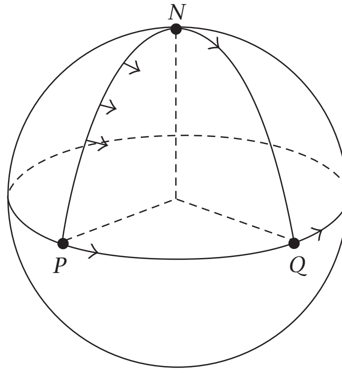


شكل ٦-٦: لا تنطبق مسلَّمة التوازي على الهندسة الكروية

قد تبدو هذه حيلةً وضيعة؛ فإذا عرَّفتُ «الخط المستقيم» بأسلوبٍ جديد، فمن غير المستغرَب أن تنهارَ مُسلَّمة التوازي من أساسها. ولكن ليس المقصودُ أن يكون الأمرُ مُستغرَبًا، بل إن التعريف قد وُضِعَ لهذا الغرض على وجهِ الخصوص. وسيكون الأمر مثيرًا للاهتمام عندما نفحص بعضَ البراهين المطروحة كمحاولاتٍ لإثباتِ مُسلَّمة التوازي. وفي كل حالة، سنكتشف افتراضًا لا يصلح للهندسة الكروية.

على سبيل المثال، يَفترض البرهان رقم (١) أن العبارة «في الاتجاه نفسِه» واضحةُ المعنى. لكن المعنى غيرُ واضح إطلاقًا في حالة سطح الكرة. لنرَ هذا، افترِض أنَّ لدينا النقاطَ الثلاث P وQ وN الموضحة في شكل ٦-٧. النقطة N هي القُطب الشمالي، وتقع النقطة P على خط الاستواء، وكذلك تقع النقطة Q على خط الاستواء في رُبع المسافة من النقطة P. يُوجَد أيضًا في شكل ٦-٧ سهمٌ صغير عند P، يشير إلى Q على طولِ

خط الاستواء. ما السهم الذي يمكن رسمُه عند Q حتى يشيرَ في الاتجاه نفسِه؟ الاتجاه الطبيعي الذي يمكن اختياره ما زال على طولِ خط الاستواء، بعيدًا عن P. ماذا عن رسم سهمٍ عند N في الاتجاه نفسِه مرةً أخرى؟ يمكننا اختيارُ هذا السهم كالآتي. ارسم القطعةَ المستقيمة من P إلى N. بما أن السهم عند النقطة P يصنع زاويةً قائمة مع هذه القطعة المستقيمة، فلا بد أن الأمر نفسَه ينطبق على السهم عند النقطة N، وهو ما يعني حقيقةَ أن السهم يُشير لأسفل في اتجاه Q. ولكن، لدينا مشكلة الآن، وهي أن السهم الذي رسَمناه عند N لا يُشير في الاتجاه نفسه عند Q.



شكل ٦-٧: العبارة «في الاتجاه نفسه» لا معنى لها على سطح الكرة

المُشكلة في هذا البرهان أنه غيرُ مُفصَّل بقدرٍ كافٍ. لماذا لا يقطع المستقيمُ M المعرَّفُ فيها المستقيم L؟ ففي نهاية الأمر، إذا كان L وM مستقيمَين في كرة، فإنهما سيتقاطعان. أما فيما يخصُّ البرهان رقم (٣)، فإنه يفترض أن M خطٌّ مستقيم. وهذا لا ينطبق على الكرة: إذا كان L هو خط الاستواء وM يتكوَّن من كلِّ النقاط الواقعة على مسافة 1000 ميل شمالَ خط الاستواء، فإن M ليس دائرةً عُظمى. في الواقع إنها خطُّ عرضٍ ثابت، وكما سيُخبرك أيُّ طيَّار أو بحَّار، لا يُمثل أقصرَ مسار بين النقطتَين.

البرهان رقم (٤) مختلفٌ بعضَ الشيء، حيث يتعلق بأحادية المستقيمات المتوازية وليس وجودها. وسأناقش هذا الموضوعَ في الجزء التالي. يطرح البرهانُ رقم (٥) افتراضًا مُهمًّا للغاية، وهو أنه: يمكن وصف الفضاء بواسطة الإحداثيات الديكارتية. ومرةً أخرى، لا ينطبق هذا على سطح الكرة.

إنَّ الهدف من تناول موضوع الكرة أنه يُتيح لنا أن نستخلِص من كل برهانٍ من البراهين (١) و(٢) و(٣) و(٤) و(٥) افتراضًا ينصُّ عمليًّا على أن «الهندسة التي نَستخدِمها ليست هندسةً كروية». قد تتساءل: وما الخطأ في ذلك؛ فنحن في النهاية لا نستخدِم الهندسة الكروية. وقد تتساءل أيضًا كيف لنا أن نأمُلَ في إثباتِ أن مُسلَّمة التوازي لا تتمخَّض عن بقية مُسلَّمات إقليدس، إذا كانت حقًّا لا تتمخَّض عنها. ولا فائدة من القول إن علماء الرياضيات قد حاولوا استنتاجها قرونًا دون أن ينجَحوا في ذلك. وكيف نتأكَّد من أنه لن يخرجَ علينا عبقريٌّ شابٌّ في غضون مائتَي سنة بفكرةٍ رائعة جديدة تُفضي في النهاية إلى برهان؟

هذا السؤال له إجابةٌ جميلة، على الأقل، من حيث المبدأ. وُضِعَت المسلَّمات الأربع الأولى لإقليدس لوصف الفراغ المستوي اللانهائي ذي البُعدَين. لكننا غيرُ مُجبَرين على تفسيرها بهذه الطريقة ما لم ينتج بالطبع هذا الاستواءُ من المُسلَّمات. وإذا استطعنا إعادةَ تفسير (أو ربما تقريبًا «تحريف») المسلَّمات بطريقةٍ ما عن طريق إضفاءِ مَعانٍ جديدة على مصطلحات مثل «القطعة المستقيمة»، بالأحرى كما فعلنا مع الهندسة الكروية، وإذا وجَدْنا بعدما فعَلنا ذلك أن المُسلَّمات الأربعَ الأولى صحيحةٌ لكن مُسلَّمة التوازي خاطئة، نكون بذلك قد أثبتنا أن مُسلَّمة التوازي ليست نتيجةً للمسلَّمات الأخرى.

لكي نعرف سببَ ذلك، تخيَّل أن لدَينا برهانًا مزعومًا، يبدأ بالمُسلَّمات الأربع الأولى لإقليدس، ويَخلُص بعد سلسلةٍ من الخطوات المنطقية الدقيقة إلى مُسلَّمة التوازي. بما أن الخطوات تتتابع منطقيًّا، فإنها ستظلُّ مُتحققةً وصحيحة عند تفسيرها بالتأويل الجديد. وبما أن المسلَّمات الأربع الأولى صحيحةٌ بموجب التفسير الجديد، ومُسلَّمة التوازي غيرُ صحيحة، فلا بد من وجودِ خطأٍ ما في هذا البرهان.

لماذا لا نَستخدم الهندسة الكروية لطرحِ التفسير الجديد؟ السبب، للأسف، أن المُسلَّمات الأربعَ الأولى لإقليدس ليست كلُّها صحيحةً في حالة الكرة. على سبيل المثال، لا تحتوي الكرةُ على دوائرَ ذات أنصافِ أقطار كبيرة على نحوٍ اختياري، ومن ثَمَّ فإن المُسلَّمة الثالثة غيرُ صحيحة، كما أنه لا يُوجَد ما يمكن أن نُسمِّيَه المسارَ الأقصر الوحيد ما بين القطبَين الشماليِّ والقطبي، ومن ثَمَّ فإن المسلَّمة الأولى غيرُ صحيحة كذلك. وعليه، فإنه على الرغم من أن الهندسة الكروية ساعَدَتنا في فهم أوجُه القصور في بعض البراهين الاجتهادية لمُسلَّمة التوازي، فإنها لا تزال تترك المجالَ مفتوحًا لاحتمالية أن ينجح برهانٌ آخرُ في ذلك. وبناءً على ذلك، سأنتقل إلى تفسيرٍ جديد آخَر، يُسمَّى الهندسة الزائدية. ومرةً

أخرى ستكون مُسلَّمة التوازي غيرَ صحيحة، ولكن هذه المرة ستكون كلُّ المسلَّمات الأربع الأولى صحيحة.

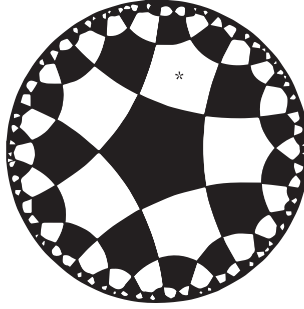
(٤) الهندسة الزائدية

هناك العديدُ من الطرق المتكافئة لوصفِ الهندسة الزائدية، ولكن الطريقة التي اخترتُها معروفةٌ باسم نموذج القرص، اكتشفَها عالِمُ الرياضيات الفرنسيُّ العظيم هنري بوانكاريه. ومع أن المجال لا يتَّسع لتعريفها بدقةٍ في كتابٍ كهذا، فيُمكنني على الأقل شرحُ بعض سِماتها، ومناقشةُ ما تُخبرنا به عن مسلَّمة التوازي.

يُعَدُّ فهم نموذج القرص أكثرَ تعقيدًا من فهم الهندسة الكروية؛ لأن الأمر لا يتطلَّب هنا إعادةَ تفسيرِ مصطلحَي «المستقيم»، «القطعة المستقيمة» فحسب، ولكن أيضًا فكرة المسافة. على سطح الكرة المسافة لها تعريفٌ سهلُ الاستيعاب: المسافة بين نقطتَين x وy هي أقصرُ طولٍ ممكنٍ للمسار من x إلى y الذي يقع داخل سطح الكرة. ومع أنَّ ثمة تعريفًا مشابهًا ينطبق في الهندسة الزائدية، فإنه من غير الواضح — لأسبابٍ سوف تتَّضح لاحقًا — ما هو أقصرُ مسار، أو في الواقع ما هو طولُ أيِّ مسار.

يوضح شكل ٦-٨ تغطية القرص الزائدي باستخدام أشكالٍ خماسية منتظِمة. وهذه بالطبع جملةٌ تستوجب الشرح؛ لأنها تُصبح غيرَ صحيحةٍ إذا فهمنا المسافةَ بالطريقة العادية: من الواضح أن حوافَ هذه «الأشكال الخماسية» ليست خُطوطًا مستقيمة، وليست متساويةً في الطول. ولكن، المسافات في القُرص الزائدي لا تُعرَّف بالطريقةِ المعتادة، وتصبح أكبرَ بالنسبة إلى المسافة العادية كلما اقتربَت من الحدِّ. وفي الواقع، فإنها تُصبح أكبرَ بكثيرٍ حتى إنَّ الحدَّ — على الرغم مما يبدو عليه ظاهريًّا — يكون بعيدًا جدًّا عن المركز. ومن ثمَّ، فإن السبب في أن الخماسيَّ المميَّز بنجمةٍ يبدو أنَّ له ضلعًا أكبرَ من كل الأضلاع الأخرى: هو أن هذا الضلع أقربُ إلى المركز. وقد تبدو الأضلاع الأخرى أقصر طولًا، إلا أنَّ المسافة الزائدية تُعرَّف بحيث يُعوَّض هذا القِصَر الظاهري بدقةٍ بقُرب هذه الأضلاع من الحافة.

إذا كان ذلك يبدو مُحيِّرًا ومتناقضًا، فيُمكنك تخيُّل خريطةِ العالم. كما هو معلومٌ للجميع، فإنه نظرًا إلى أن العالَم دائري، والخريطة مُسطَّحة، فالمسافات تكون مُحرَّفة بالضرورة. تُوجَد طرقٌ عديدة لإجراء هذا التحريف، وفي أكثرِ هذه الطرق شيوعًا، وهو «إسقاط مركاتور»، تبدو الدولُ قربَ القطبَين أكبرَ كثيرًا من حقيقتها. تبدو جرينلاند،



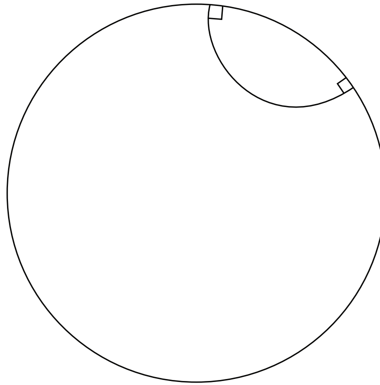
شكل ٦-٨: تغطية مستوًى زائديٍّ بأشكالٍ خماسية منتظمة

على سبيل المثال، وكأنها تُضاهي في حجمها أمريكا الجنوبيةَ بأكملِها. وكلما اقتربتَ من الحدِّ العُلوي أو السفلي لهذه الخريطة، تقلَّصَت المسافة مقارنةً بما هي عليه في الحقيقة.

يترتَّب على هذا التحريف نتيجةٌ معروفة، وهي أن أقصرَ مسار بين نقطتَين على سطح الكرة الأرضية يظهر مُنحنيًا على الخريطة. وهذه الظاهرة يمكن فهمُها بطريقتَين. الطريقة الأولى هي أن تُنحِّيَ الخريطة جانبًا وتستحضرَ في ذهنك الكرةَ الأرضية، لاحِظ أنه إذا كان لديك نقطتان في النصف الشمالي، بحيث تقعُ الأولى على مسافةٍ طويلة جدًّا إلى الشرق عن الثانية (مثالٌ جيد على ذلك باريس وفانكوفر)، فإنَّ أقصرَ مسارٍ من النقطة الأولى إلى الثانية سيمرُّ بالقرب من القُطب الشمالي بدلًا من الاتجاه غربًا. أما عن الطريقة الثانية، فهي أن تستعين بالخريطة الأصلية لمناقشة وتفسير فكرة أنه إذا كانت المسافات قربَ الحدِّ العُلوي للخريطة أقصرَ مما تبدو، فإنه يمكن تقصيرُ المسار بالاتجاه شمالًا نوعًا ما وكذلك غربًا. وبذلك، فإنه من الصعب أن نعرف بدقةٍ ما المسارُ الأقصر، إلا أن المبدأ على الأقلِّ صار واضحًا، وهو أن «الخط المستقيم» (بمنظورِ المسافات الكروية) سيكون مُنحنيًا (بمنظور المسافات على الخريطة الفعلية).

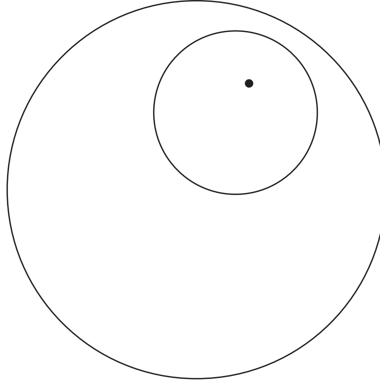
وكما قلتُ سابقًا، فعندما تصل إلى حافة القرص الزائدي، فإن المسافاتِ تُصبح أكبرَ مقارنةً بما تبدو عليه. ونتيجةً لذلك، فإن أقصر مسارٍ بين نقطتَين يَميل إلى الانحراف ناحيةَ مركز القرص. هذا يعني أنه ليس خطًّا مستقيمًا بالمعنى العاديِّ (إلا إذا تصادفَ أن هذا المستقيم يمرُّ بالضبط عبر المركز). ويتبيَّن أن المستقيم الزائدي؛ أي: أقصر مسارٍ بمنظور الهندسة الزائدية، هو قوسُ الدائرة الذي يتقاطع مع حدِّ الدائرة الرئيسية مكوِّنًا

زاويتَين قائمتَين (انظر شكل ٦-٩). والآن، إذا نظرتَ مرةً أخرى إلى التغطية الخماسية لشكل ٦-١٠، فإنك سترى أن حوافَ الأشكال الخماسية، وإن كانت لا تبدو مُستقيمة، هي في الحقيقة قطعٌ مستقيمة، بما أنه يمكن مَدُّها إلى مستقيماتٍ زائدية، طبقًا للتعريف الذي طرَحتُه آنفًا. وبالمِثل، فإنه على الرغم من أن الأشكال الخماسية لا تبدو جميعُها ذاتَ شكلٍ وحجم واحد، فإنها كذلك بالفعل، بما أن الأشكال الخماسيةَ القريبة من الحافَة تكون أكبرَ كثيرًا مما تبدو — وهو عكس ما يحدث في حالة جرينلاند. ومن ثَمَّ، فإن نموذج القرص، مثله مثل إسقاط مركاتور، هو «خريطة» مُحرَّفة للهندسة الزائدية الفعلية.



شكل ٦-٩: مستقيمٌ زائدي نموذجي

ومن الطبيعي أن نسأل عند هذه النقطة عمَّا تبدو عليه الهندسةُ الزائدية الحقيقية. أي: ماذا تكون الخريطةُ المُحرَّفة لخريطةٍ ما؟ ما الذي يُضاهى بنموذج القرص على غِرار مضاهاة الكرةِ بإسقاط مركاتور؟ الإجابة عن هذا صعبةٌ إلى حدٍّ ما. فمن جانبٍ، كان ضربًا من الحظ أنْ تَسنَّى التعرفُ على الهندسة الكروية بوصفها سطحًا يقع في فراغٍ ثلاثيِّ الأبعاد. ولو أننا بدأنا بإسقاط مركاتور، بمفهومه الغريب للمسافات، دون معرفةِ أنَّ ما لدَينا هو خريطةٌ للكرة، لَاندهَشنا وابتهَجْنا لاكتشاف وجودِ سطح مُتماثل على نحوٍ رائع في الفراغ، خريطة لهذه الخريطة، إن جاز التعبير، حيث المسافات بسيطةٌ للغاية، لا تَعْدو كونَها أكثرَ من أطوالٍ لأقصرِ المسارات في المعتاد، بمفهومٍ يسهل استيعابُه.

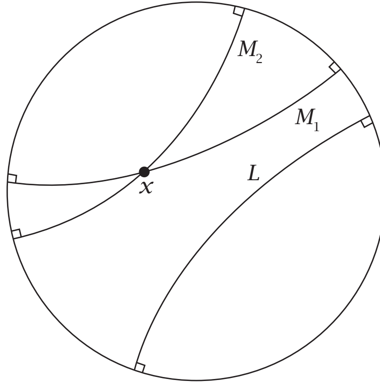


شكل ٦-١٠: دائرة زائدية نموذجية، ومركزها

لسوء الحظ، لا يُوجَد شيءٌ مماثل لهذا في الهندسة الزائدية. لكن الغريب أن هذا لم يجعل الهندسة الزائدية أقلَّ واقعيةً من الهندسة الكروية. إنه يجعلها أصعبَ فهمًا، على الأقل في البداية، لكن كما أكَّدتُ في الفصل الثاني، فإن واقعيةَ المفاهيم الرياضية تتعلق بوظيفتها أكثرَ من معناها. وبما أنه يمكن الوقوف على وظيفة القُرص الزائدي (على سبيل المثال، إذا سألتَني عمَّا قد يعنيه دورانُ قرصٍ مُغطًّى بأشكالٍ خماسية بمقدار 30 درجة حول أحد رءوس الشكل الخماسي الرئيسي، فيُمكنني إخبارك)، فإن الهندسة الزائدية واقعية بقدرِ واقعية أي مفهومٍ رياضي آخر. وقد تكون الهندسة الكروية أسهلَ استيعابًا من وجهةِ نظر الهندسة الإقليدية الثلاثية الأبعاد، ولكنه ليس بالفارق الكبير.

من خصائص الهندسة الزائدية الأخرى أنها تُحقق المسلَّمات الأربع الأولى لإقليدس. على سبيل المثال، يمكن توصيلُ أيِّ نقطتَين بدقةٍ بواسطة قطعةٍ مُستقيمة زائدية واحدة. (أي، قوس الدائرة الذي يقطع الدائرة الرئيسية بزاويتَين قائمتَين). ومع ذلك، قد يبدو الأمرُ كما لو أنك لا تستطيع إيجادَ دائرة نصف قُطرها كبيرٌ حول أيِّ نقطةٍ مُعطاة، ولكن هذا يعني أنك نسيتَ أن المسافات تُصبح أكبرَ بالقرب من حافَةِ القرص. وفي الواقع، إذا تماسَّت الدائرة الزائدية مع الحافة، فإن نصف قُطرها (أي نصف قطرها الزائدي) سيكون كبيرًا جدًّا بدون شك. (الدائرة الزائدية تُشبه الدائرة العادية، إلا أن مركزها لا يُوجَد حيث يتوقَّع المرءُ أن يكون. انظر شكل ٦-١٠.)

أما فيما يخصُّ مسلَّمة التوازي، فإنها غيرُ صحيحة من وجهة نظر الهندسة الزائدية، وهذا بالضبط ما كنا نأمُله. يمكن رؤية ذلك في شكل ٦-١١، حيث أشرتُ إلى ثلاثةٍ من الخطوط المستقيمة الزائدية بالأسماء L وM_1 وM_2. يتقاطع المستقيمان M_1 وM_2 في نقطةٍ سمَّيتُها x، لكن لا يتقاطع أيٌّ منهما مع المستقيم L. ومن ثمَّ، يوجد مستقيمان يمرَّان بالنقطة x (بل في الواقع عدد لا نهائي من المستقيمات) لا يتقاطع مع L. وهذا يتناقض مع مسلَّمة التوازي، التي تنصُّ على ضرورة وجود مستقيمٍ واحد فقط. بعبارة أخرى، فإننا في الهندسة الزائدية لدَينا التفسير البديل لمسلَّمات إقليدس، الذي كنا نبحث عنه بالضبط للبرهنة على أن مُسلَّمة التوازي ليست نتيجةً منطقية للمسلَّمات الأربع الأخرى.



شكل ٦-١١: مسلَّمة التوازي لا تتحقق في المستوى الزائدي

بالطبع، لم أُبرهن فعليًّا في هذا الكتاب على أن الهندسة الزائدية لها جميعُ الخصائص التي ادَّعيتُها. فهذا يتطلب إفرادَ بِضع محاضراتٍ في مقرَّرٍ جامعي نمطيٍّ في مادة الرياضيات، لكنني على الأقل أستطيع أن أوضح على نحوٍ أدقَّ كيف نُعرِّف المسافة الزائدية. وللقيام بذلك، يجب أن أحدِّد إلى أيِّ مدًى تكون المسافات القريبة من القرص أكبرَ مما تبدو عليه. الإجابة هي أن المسافات الزائدية عند نقطة P تكون أكبرَ من المسافات «العادية» بمقدار $1/d^2$، حيث d هي المسافة من النقطة P إلى حدِّ الدائرة. بعبارةٍ أخرى، إذا تنقَّلتَ في القرص الزائدي، فإن سرعتَك عندما تمرُّ بالنقطة P — طبقًا للمفهوم

الزائدي للمسافة، هي $1/d^2$ مضروبًا في سرعتك الظاهرية، وهو ما يعني أنك إذا حافظتَ على مسافةٍ زائدية ثابتة، فسيبدو الأمر كأن سرعتك تتناقص كلَّما اقتربتَ من حدِّ القرص.

قبل أن نترك موضوعَ الهندسة الزائدية، دعنا نتعرَّف على سبب إخفاق البرهان رقم (٤) في إثبات وجودِ مُستقيمٍ مُوازٍ واحد فقط. كانت الفكرة كالآتي: لنفترض أنَّ لدَينا المستقيم L، وx نقطةٌ لا تقع على L، ولدَينا المستقيم M يمر عبر النقطة x ولا يتقاطع مع المستقيم L، يمكن توصيل المستقيمَين L وM بواسطة العديد من القطع المستقيمة المتعامدة على كلٍّ من L وM، مما يُقسِّم الفراغ بين L وM إلى مستطيلات. يبدو واضحًا أنه يمكن تنفيذُ ذلك، لكنه أمرٌ غير ممكنٍ في السياق الزائدي؛ لأن مجموعَ زوايا الشكل الرباعيِّ تكون دائمًا أقلَّ من 360 درجة. بعبارة أخرى، في القرص الزائدي لا توجد ببساطة المستطيلاتُ اللازمة للبرهان.

(٥) كيف يمكن أن ينحنيَ الفراغ؟

واحدةٌ من أكثر العبارات المتناقضة في الرياضيات (والفيزياء) هي «الفراغ المُنحني». نعرف جميعًا ما يعنيه أن يكون خطٌّ أو سطحٌ منحنيًا، لكن كيف يكون الفراغُ نفسُه منحنيًا؟ وحتى لو استطعنا بطريقةٍ ما فَهْم فكرة الانحناء الثلاثيِّ الأبعاد، فالتشبيهُ مع السطوح المنحنية يوحي بأننا لن نستطيعَ أن نرى بأنفسنا إذا ما كان الفراغُ منحنيًا، إلا إذا استطعنا الخروجَ إلى بُعدٍ رابع لنرى ذلك. وربما لَاكتشَفنا وقتها أن الكون كان بمنزلة السطح الثلاثيِّ الأبعاد لكرةٍ رباعية الأبعاد (وهو مفهومٌ شرَحتُه في الفصل الخامس)، تبدو على الأقل منحنية.

هذا كله مستحيلٌ بالطبع. وبما أننا لا نعرف كيف نقف خارج الكون — هذه الفكرة متناقضة تقريبًا في مفرداتها — والدليل الوحيد الذي يمكننا استخدامه ينبع من داخله. فما الدليل الذي يمكن أن يُقنِعَنا بأن الفراغ مُنحنٍ؟

ولكن مرةً أخرى، يصبح السؤال أسهلَ إذا انتهَجْنا نهجًا مجردًا. وبدلًا من الدخول في تمرينات عقلية غير عادية، ونحن نحاول أن نفهم ماهيَّة الفراغ المنحني الحقيقيةَ، دعونا نتبع ببساطةٍ الأسلوبَ المعتاد في تعميم المفاهيم الرياضية. نحن نفهم كلمة «مُنحَنٍ» عند استخدامها للسطوح الثنائية الأبعاد. وحتى يمكن استخدامُها في سياقٍ غيرِ معتاد؛ أي في سطحٍ ثلاثيِّ الأبعاد، علينا أن نُحاول إيجادَ خصائص السطوح المنحنية التي يكون من

السهل تعميمُها، كما فعلنا عند تعريف $2^{3/2}$، أو المكعبات الخماسية الأبعاد، أو بُعد نُدْفة الثلج لكوخ. وبما أن نوع الخاصية التي نريد الانتهاءَ إليها، هو نوعٌ يمكن اكتشافُه من داخل الفراغ؛ كان لِزامًا علينا البحثُ عن طرق اكتشاف انحناء السطح التي لا تعتمد على الوقوف خارجه.

كيف نُقنع أنفسَنا مثلًا أنَّ سطح الأرض مُنحنٍ؟ تتمثَّل إحدى الطرق في الانطلاق في مكُّوك فضائي، والنظر إلى الخلف، وملاحظة أنه كرويٌّ تقريبًا. ولكن، التجرِبة التالية، وهي تجربة ثنائية الأبعاد بقدْرٍ أكبر بكثير، ستكون مُقنعة جدًّا كذلك؟ ابدأ عند القطب الشمالي، واتَّجِه جنوبًا مسافةَ نحو 6200 ميل، بعد تعيين اتجاهك المبدئي. انعطِف يمينًا بعد ذلك، واقطع المسافةَ نفسَها مرةً أخرى. ثم انعطِف يسارًا واقطَع المسافة نفسَها مرةً ثالثة. المسافة 6200 ميل هي تقريبًا المسافة من القطب الشمالي إلى خط الاستواء، وهكذا ستنقلك الرحلةُ من القطب الشمالي إلى خط الاستواء، ثم ربع المسافة حول خط الاستواء، ثم تعود بك إلى القطب الشمالي مرةً أخرى. وعلاوةً على ذلك، فإن اتجاه عودتك سيكون عموديًّا على الاتجاه الذي بدأتَ به. وبناءً على ذلك، يُوجَد على سطح الأرض مثلثٌ متساوي الأضلاع كلُّ زواياه قائمة. وعلى السطح المستوي، يجب أن يكون قياس زوايا المثلث المتساوي الأضلاع 60 درجة، حيث تكون جميعها متساويةً في القياس ومجموعها 180 درجة. وعليه، فإن سطح الأرض ليس مسطحًا.

وهكذا، فإن إحدى طرق إثبات أن السطحَ الثنائيَّ الأبعاد مُنحنٍ، من داخل السطح نفسِه، هي إيجادُ مثلثٍ مجموعُ زواياه ليس 180 درجة، وهذا أمرٌ يمكن تجرِبتُه في الأسطح الثلاثية الأبعاد كذلك. لقد ركَّزتُ في هذا الفصل على الهندسة الإقليدية، والكروية، والزائدية في بُعدَين، ولكن يمكن التعميمُ بسهولةٍ تامة على الأسطح الثلاثية الأبعاد. فإذا قِسْنا زوايا المثلث في الفراغ ووجَدنا أن مجموع زواياه أكبرُ من 180 درجة، فهذا سيدلُّ على أن الفراغ أشبهُ بنسخةٍ ثلاثية الأبعاد من سطح كرةٍ عنه بالفراغ الذي يمكن وصفُه بواسطة الإحداثيات الديكارتية.

إذا حدث هذا، فإنه يبدو منطقيًّا أن نقولَ إن الفراغ ذو انحناءٍ موجب. ويمكن توقُّعُ سِمةٍ أخرى في هذا الفضاء، وهي أن المستقيمات التي بدأَت في الاتجاه نفسِه سوف تتقارب، وقد تتقاطع في النهاية. ولكن من سِماته أيضًا أنَّ طول محيط الدائرة التي نصفُ قطرها r لن يُساويَ $2\pi r$، ولكن أقل من ذلك قليلًا.

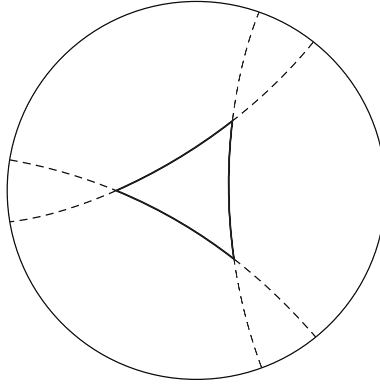
ربما تميل إلى توضيحِ أن الفراغ كما نعرفه لا يتَّسم بهذه الخصائص الغريبة. فالمستقيمات التي تبدأ في اتجاهٍ بعينِه تستمرُّ في الاتجاه نفسِه، ولا تغييرَ يطرأُ على زوايا المثلث ومحيطات الدوائر كذلك. بعبارةٍ أخرى، يبدو أنه حتى لو كان من الممكن منطقيًّا أن يكون الفراغُ منحنيًا، فإنه في الواقع مسطَّح. ولكن من الممكن أن يُعزَى ظهورُ الفراغ أمامنا مسطحًا إلى أننا نُقيم في هذا الجزء الصغير منه، تمامًا كما يبدو سطحُ الأرض مسطحًا، أو بالأحرى مسطحًا مع وجودِ نُتوءاتٍ مختلفة الأحجام، إلى شخصٍ لم يُسافر بعيدًا.

بعبارةٍ أخرى، ربما يكون الفراغ مسطحًا على نحوٍ تقريبيٍّ فحسب، وربما إذا استطعنا تكوينَ مثلثٍ كبير جدًّا، فإننا سوف نجد أن مجموعَ زواياه لن يكون 180 درجة. هذا بالطبع ما حاوَلَه جاوس، إلا أن مثلثه هذا لم يكن كبيرًا بدرجةٍ كافية على الإطلاق. ومع ذلك، فإنه في عام ١٩١٩ أثبتَت إحدى أشهر التجارِب العِلمية في التاريخ أن فكرة الفراغ المنحني ليست مجردَ خرافةٍ من نَسْج خيالِ علماء الرياضيات، بل هي حقيقةٌ واقعية. طبقًا لنظرية النسبية العامة لأينشتاين، التي نُشِرَت قبل ذلك بأربعة أعوام، فإن الفراغَ ينحني بفِعل الجاذبيَّة، ومِن ثمَّ فإن الضوء لا ينتقل دائمًا في خطوطٍ مُستقيمة، على الأقل حسب فهم إقليدس للمصطلح. والتأثيرُ صغيرٌ جدًّا حتى إنه لا يمكن اكتشافه بسهولة، ولكن جاءت الفرصةُ في عام ١٩١٩ عندما حدث كسوفٌ كُلي للشمس، أمكَنَ مشاهدتُه من جزيرة «برينسيب» في خليج غانا. وفي أثناء حدوثه، التقَط عالِمُ الفيزياء آرثر إدينجتون صورةً فوتوغرافية ظهرَت فيها النجوم الموجودة بجوار الشمس مباشرة في غيرِ مكانها المتوقَّع، تمامًا كما تنبَّأَت نظرية أينشتاين.

ومع أنه من المسلَّم به اليوم أن الفراغَ (أو، على نحوٍ أدق، الزمَكان) مُنحنٍ، فإن الانحناء الذي نُلاحظه، كما في حالة الجبال والوديان على سطح الأرض، هو مجردُ اختلالٍ بسيطٍ في شكلٍ أكبرَ كثيرًا، وأكثرَ تماثلًا. وإحدى المسائل الكبرى غيرِ المحسومة في الفلَك تعيينُ شكل الكون الواسع النطاق، وهو الشكل الذي يتَّخِذه الكون إذا أزَلْنا الانحناءاتِ الناتجةَ عن النجوم والثقوب السوداء وغيرها. هل سيظلُّ الكون منحنيًا مثل كرةٍ كبيرة، أو سيُصبح مسطَّحًا، كما يتصوَّره البعضُ بطبيعة الحال، وإن كان من المحتمَل جدًّا أن يكون تصوُّرُهم غيرَ صحيح؟

الاحتمال الثالث أن يكون الكونُ سالب الانحناء. وهذا يعني ببساطةٍ عكس الانحناء الموجب بطريقةٍ أو بأخرى. ومن ثَمَّ، يكون دليلُ الانحناء السالبِ أن مجموع زوايا المثلث

أقلُّ من 180 درجة، أو أن المستقيمات التي تبدأ في الاتجاه نفسِه تميل إلى أن تتباعد، أو أن محيط الدائرة التي نصفُ قطرِها r أكبرُ من $2\pi r$. يحدث هذا النمطُ من السلوك في القرص الزائدي. على سبيل المثال، يعرض شكل ٦-١٢ مثلثًا مجموع زواياه أقلُّ من 180 درجة. ومن غير الصعب تعميمُ ما يحدث في الكرة والقرص الزائدي على أشكالٍ مشابهة ذاتِ أبعادٍ أعلى، وقد تكون الهندسة الزائدية نموذجًا أفضلَ لشكل الزمكان الأوسع نطاقًا عن الهندسة الكروية أو الإقليدية.



شكل ٦-١٢: مثلث زائدي

(٦) المنطويات

إنَّ السطح المغلَق هو شكلٌ ثنائيُّ الأبعاد، ليس له حدود. سطح الكرة مثالٌ جيِّد على هذا، وكذلك الطارة (المصطلح الرياضي لشكل سطح الحلقة أو للكعكة المُحلَّاة التي على شكل حلقة). وكما اتضح من مناقشة موضوع الانحناء، قد يكون من المفيد التفكيرُ في هذه الأسطح دون الرجوع إلى الفراغ الثلاثيِّ الأبعاد الموجودة فيه، ويزداد هذا الأمرُ أهميةً في حال الرغبة في تعميم مفهوم السطح المغلق ليشمل أبعادًا أعلى.

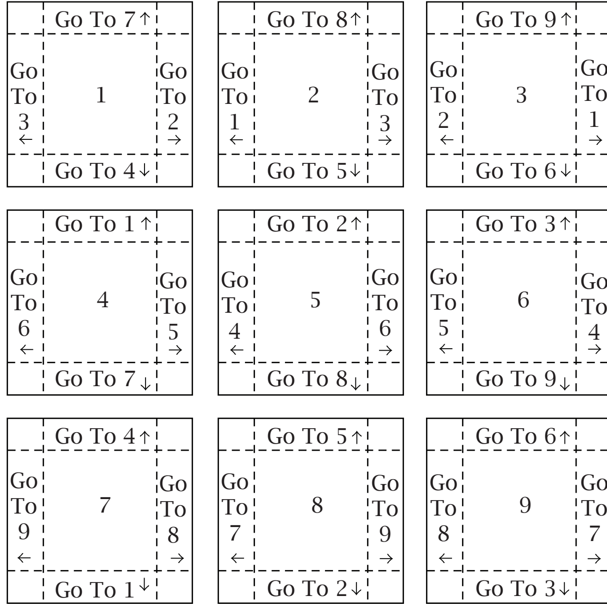
ليس علماءُ الرياضيات وحدهم هم مَن يُحبِّذون التفكير في الأسطح بمنظورٍ ثنائيِّ الأبعاد بَحْت. على سبيل المثال، الهندسة في الولايات المتحدة متأثرةٌ بوضوحٍ بانحناء الأرض، لكن إذا أردنا تصميم خريطةِ طريقٍ مُفيدة، فلا يستدعي الأمرُ بالضرورة طباعتَها على

قطعةٍ كبيرة منحنية من الورق. والأكثرُ عمَليةً من ذلك أن تُنشئ كتابًا يتضمَّن عدةَ صفحاتٍ، تعرض كلٌّ منها جزءًا صغيرًا من الدولة. ومن الأفضل أن تكون هذه الأجزاءُ متراكبة، بحيث إذا وقَعَت مدينةٌ ما على نحوٍ غيرِ ملائم بالقرب من حافَةِ صفحة، فإنها تظهر في صفحةٍ أخرى بوضوحٍ أكثر. وعلاوةً على هذا، ستُوجَد عند حواف كلِّ صفحة إشارةٌ توضح الصفحاتِ الأخرى التي تُمثل المناطقَ المتراكبة جزئيًّا وآليةَ هذا التراكب. ونظرًا إلى انحناء الأرض، فلن تكون أيٌّ من الصفحات دقيقةً تمامًا، ولكن يمكن للمرء أن يُضمِّن الصفحاتِ خطوطَ العرض والطول الثابتةَ للإشارة إلى التشوُّه البسيط الحادث، وبهذه الطريقة يمكننا تضمينُ هندسة الولايات المتحدة في كتابٍ مؤلَّف من صفحاتٍ مسطحة.

من حيث المبدأ، لا يُوجَد ما يعوق الفردَ عن إنشاء أطلس يشمل كلَّ العالم بتفصيلٍ مُشابه (وإن كانت ستظهر صفحاتٌ عديدة بأكملها تقريبًا باللون الأزرق). ومن ثَمَّ، يمكن بطريقةٍ ما تضمينُ الخصائص الرياضية للكرة في أطلس واحد. وإذا أردتَ حلَّ مسائلَ هندسية عن الكرة، وليس في مقدورك تمامًا أن تتخيَّلها ولكن لديك أطلس، فستتمكن من حلِّها بقليلٍ من الجهد. ويوضح شكل ٦-١٣ أطلس من تسع صفحات، لكنه ليس لكرة، بل لطارة. ولمعرفةِ كيف يُناظر هذا شكلَ الكعكة المحلَّاة، تَصوَّر أنك لصقتَ الصفحتَين معًا بحيث تُكوِّنان صفحةً واحدة كبيرة، ثم وصَّلتَ الحافَتَين العُلويةَ والسفلية للصفحة الكبيرة، لتكوينِ أسطوانة، وأخيرًا وصَّلتَ نهايتَي الأسطوانة معًا.

من أهمِّ فروع الرياضيات دراسةُ كائناتٍ معروفة باسم المُنطويات، تنتُج عن تعميم هذه الأفكارِ لتشمل الثلاثةَ الأبعاد أو أكثر. وبوجهٍ عام، فإن المنطويةَ ذاتَ البُعد d هي أيُّ كائنٍ هندسي تُحاط فيه كلُّ نقطةٍ بمنطقةٍ تُشبه كثيرًا جزءًا صغيرًا من الفراغ ذي البُعد d. وبما أن المنطويات تُصبح أصعبَ في تصوُّرها كلما ازداد عددُ الأبعاد، فإن فكرة الأطلس تُصبح من ثَمَّ أكثرَ نفعًا.

لنُفكِّرْ لحظةً فيما سيبدو عليه الأطلس الخاص بمنطويةٍ ثلاثية الأبعاد. من الضروريِّ بالطبع أن تكون الصفحاتُ ثلاثيةَ الأبعاد، كما أنها ستكون مسطحةً على غِرار صفحاتِ خريطة الطريق. وأعني بذلك أن الصفحات ستكون بمنزلة أجزاءٍ كبيرة من الفراغ الإقليدي المعروف، ويمكن أن نجعلَها متوازياتِ مُستطيلاتٍ أو أشباهَ مكعَّبات، ولكنه أمرٌ غير مُهمٍّ جدًّا رياضيًّا. كلُّ صفحة من هذه الصفحات الثلاثية الأبعاد ستكون بمنزلةِ خريطةٍ لجزءٍ صغير من المنطوية، وعلى المرء أن يُحدد بدقةٍ آليةَ التراكُب في هذه الصفحات. وربما يكون



شكل ٦-١٣: أطلس لطارة (سطح حلقي)

أحدُ أساليب تحديد ذلك أن النقطة (x, y, z) التي تقع قربَ حافةٍ معينة من الصفحة A تُناظر النقطةَ $(2y, x, z - 4)$ في الصفحة B.

وعلى ضوء هذا الأطلس، كيف نتصوَّر أن تكون طريقة التنقل داخل المنطوية؟ الطريقة البديهية أن نُفكِّر في نقطةٍ ما تتحرَّك في إحدى الصفحات. إذا وصلَت هذه النقطةُ إلى حافة الصفحة، فستُوجَد صفحةٌ أخرى تعرض الجزء نفسَه من المنطوية، ولكن لن تُوجَد النقطةُ عند الحافة مباشرةً، حتى يتَسنَّى للمرء الانتقالُ إلى هذه الصفحة عوضًا عن ذلك. ومن ثَمَّ، يمكن تجميعُ هندسة المنطويات بأكملها باستخدام دليل أطلس، بحيث لا يكون من الضروري التفكيرُ في المنطوية بكونها «حقًّا» سطحًا ثلاثيَّ الأبعاد، يقع في فراغٍ رباعي الأبعاد. وفي الحقيقة، فإن بعض المنطويات الثلاثيةِ الأبعاد لا يمكن حتى أن نُضمِّنها في فراغاتٍ رباعية الأبعاد.

تُثير فكرة الأطلس هذه بعضَ التساؤلات البديهية. على سبيل المثال، على الرغم من أنها تُتيح لنا وصفَ ما يحدث إذا تحرَّكنا ضمن المنطوية، وكيف نُكوِّن من تلك المعلومة،

التي ربما تكون متضمَّنةً في عددٍ كبير من الصفحات بقواعدَ معقَّدةٍ للغاية حول كيفية تراكبها، انطباعًا عن «الشكل» الأساسي للمنطوية؟ وكيف نُميِّز أن أطلسَين مختلفَين يُمثِّلان المنطويةَ نفسَها؟ وعلى وجه الخصوص، هل من طريقةٍ سهلة نُحدِّد بها — بالنظر إلى الأطلس الثلاثي الأبعاد — ما إذا كانت المنطوية التي يُمثِّلها الأطلس سطحًا ثلاثيَّ الأبعاد في كرةٍ رباعية الأبعاد؟ لا تزال الصياغةُ الدقيقةُ لهذا السؤال الأخير، المعروفةُ باسم «حَدْسيَّة بوانكاريه»، مسألةً غيرَ محسومة، خُصِّصَت لحلِّها جائزةٌ قدرها مليون دولار (من معهد كلاي للرياضيات).

الفصل السابع

التقدير والتقريب

يُفكِّر معظم الناس في الرياضيات بوصفها مادةً تتعامل مع النتائج التامَّة والدقيقة. ويتعلم المرءُ في المدرسة أن يتوقَّع أنه إذا صِيغَت مسألةٌ رياضية بإحكام، فإنه ربما يكون لها ناتجٌ قصير، عادةً ما يُعطَى بصيغةٍ بسيطة. وهؤلاء الذين أكملوا دراستهم الجامعية في الرياضيات، وعلى وجه الخصوص، الذين يُجْرون أبحاثًا فيها، سرعان ما يكتشفون أن هذا أبعدُ ما يكون عن الحقيقة. فالعديد من المسائل ستكون مُعجِزةً وغيرَ متوقعة تمامًا إذا وُجِدَت صيغةٌ دقيقة للحل؛ ذلك أنه يُكتَفى في معظم الوقت بتقديم تقديرٍ تقريبي بدلًا من ذلك. وحتى نعتاد على عمليات التقدير، فإنها تبدو لنا بشعةً وغير مُرضية. ومع ذلك، فمِن الجدير أن نتعلَّمها؛ لأن إغفالنا لذلك معناه إغفالُ الكثير من أعظم النظريَّات والمسائل غيرِ المحسومة الأكثر إثارةً للاهتمام في الرياضيات.

(١) متتابعةٌ بسيطة مُعطاة بصيغةٍ غير بسيطة

لنفترض أنَّ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ أعدادٌ حقيقية ناتجةٌ عن تطبيق القاعدة التالية. العدد الأول a_1 يساوي واحدًا، وكلُّ عددٍ تالٍ يساوي العددَ السابق له مضافًا إليه الجذرُ التربيعي لهذا العدد. بعبارةٍ أخرى، لنفترض لكلِّ n أنَّ $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n}$. تثير هذه القاعدة البسيطة تساؤلًا بديهيًّا: ما العدد a_n؟

ولفهمِ السؤال، دعنا نحسب a_n لبعض قيم n الصغيرة. لدَينا $a_2 = 1 + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2$. إذن:

$$a_3 = a_2 + \sqrt{a_2} = 2 + \sqrt{2}$$

$$a_4 = a_3 + \sqrt{a_3} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$a_5 = a_4 + \sqrt{a_4} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2 + \sqrt{2} + \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{2}}}$$

وهكذا. يُلاحَظ أن التعبيرات في الطرف الأيمن لا يمكن تبسيطُها فيما يبدو، وأن كلَّ تعبيرٍ جديد يكون طولُه ضِعفَ التعبير السابق له. نستنتج من هذه الملاحظة أن من السهل تمامًا أن يَظهر العددُ 2 في التعبير الخاص بالعدد a_{12} بمعدل 1024 مرة، معظمها متضمَّنٌ في عددٍ من علامات الجذر التربيعيِّ المتداخِلة. ومِثلُ هذا التعبير لا يُعطينا فهمًا أعمقَ للعدد a_{12}.

هل يعني هذا أن نتخلَّى عن أي محاولةٍ لفهم المتتابعة؟ لا؛ لأنه على الرغم من أنه لا يبدو أن هناك وسيلةً جيدة للتفكير في القيمة الفعلية للعدد a_n، إلا عندما يكون n صغيرًا جدًّا، وهذا لا يستبعد احتمالَ الحصول على تقدير جيد. في الواقع، ربما يكون التوصلُ إلى تقدير جيد هو الأكثرَ فائدة في النهاية. في الجزء السابق، كتبتُ تعبيرًا صحيحًا تمامًا للعدد a_5، ولكن هل ساعدَك ذلك في فَهم a_5 على نحوٍ أفضل عن القول بأن a_5 تُساوي نحو سبعةٍ ونصف؟

دعنا إذن لا نسألْ عن ماهيَّة العدد a_n، ولنسأل بدلًا من ذلك عن مقدار a_n تقريبًا. أي دَعْنا نحاول أن نجد صيغةً بسيطة تُعطينا تقريبًا جيدًا لقيمة a_n. يتضح في النهاية أن هذه الصيغةَ موجودة، وهي a_n تساوي تقريبًا $n^2/4$. وتُوجَد حيلةٌ بسيطة لإثبات هذا بدقة، ولكن لمعرفة السبب في أن هذه القيمة التقريبية معقولة، لاحظ أن

$$(n+1)^2/4 = (n^2+2n+1)/4 = n^2/4 + n/2 + 1/4 = n^2/4 + \sqrt{n^2/4} + 1/4$$

أي إنه إذا كان $b_n = n^2/4$، فإن $b_{n+1} = b_n + \sqrt{b_n} + 1/4$. وإذا استبعَدْنا «1/4+»، فهذا يُخبرنا أن العددَين b_n ينتجان بالطريقة نفسِها التي ينتج بها a_n. ولكن، عندما يكون n كبيرًا، فإن 1/4 يكون «مجرد تحريفٍ صغير» (وهذا هو الجزء الذي

سأتركه من البرهان)، وبذلك نكون قد حسَبْنا قيمة b_n تقريبيًّا بطريقةٍ صحيحة، وهو ما يمكن أن نستنتج منه أن b_n، الذي هو $n^2/4$، تعطي تقريبًا جيدًا لقيمة a_n، كما سبق أن قلت.

(٢) طرقُ التقريب

من المهم أن نُحدِّد ما يُعَدُّ تقريبًا جيدًا عند وضع افتراضٍ كهذا؛ لأن المعايير تختلف من سياقٍ لآخَر. وإذا كان المرءُ بصدد تقريب متتابعةٍ مكوَّنة من أعدادٍ في ازديادٍ مطَّرد مثل $a_1, a_2, a_3, \ldots$ إلى متتابعةٍ أخرى $b_1, b_2, b_3, \ldots$، فإن أفضل نوعٍ من التقريب يمكن أن نأمُلَه، وإن كان من النادر أن يتحقَّق، هو أن يكون الفرق بين a_n وb_n أقلُّ دائمًا من عددٍ ثابت معيَّن — كالعدد 1000 مثلًا. وعليه، عندما يصبح a_n وb_n كبيرَين، فإنَّ النسبة بينهما تقترب كثيرًا من 1. افترض، على سبيل المثال، أنه عند نقطةٍ ما $a_n = 2408597348632498758828$، و$b_n = 2408597348632498759734$. وعليه، فإن $b_n - a_n = 906$، وهو وإن كان عددًا كبيرًا، فإنه صغيرٌ بالمقارنة بكلٍّ من a_n وb_n. وبهذا المفهوم إذا كان b_n يساوي a_n تقريبًا، فإننا نقول إن a_n وb_n «متساويان بالمقارنة بثابتٍ جَمْعي معيَّن».

يُوجَد نوعٌ جيد آخَر من التقريب، وفيه تقترب النسبة بين a_n وb_n كثيرًا من 1 بازدياد قيمة n. يتحقق ذلك عندما يكون a_n وb_n مُتساويَين بالمقارنة بثابتٍ جمعي مُعيَّن، ولكنه يتحقق أيضًا في حالاتٍ أخرى. على سبيل المثال، إذا $a_n = n^2$ و$b_n = n^2 + 3n$ فإن النسبة b_n/a_n تساوي $1 + 3/n$، وهو ما يكون قريبًا من 1 في حال كان n كبيرًا، حتى إذا كان الفرق بين a_n وa_n يساوي $3n$، وهو عددٌ كبير.

حتى هذا غالبًا ما يفوق ما قد يأمُله المرء بكثير، حتى إنه لَيكتفي بمفاهيمَ أضعفَ من التقريب. أحدُ هذه المفاهيم الشائعة أن نعتبر a_n وb_n مُتساويَين تقريبًا إذا كانا «متساوِيَين بالمقارنة بثابتٍ ضربي مُعيَّن». وهذا يعني أنه إذا لم يَزِد أيٌّ من a_n/b_n أو b_n/a_n عن عددٍ ثابتٍ ما — مرةً أخرى، فسيكون عددًا مثل 1000 أحد الاحتمالات الممكنة، ولو أنه كلما كان أصغرَ كان أفضل. بعبارةٍ أخرى، ليس الفرق بين a_n وb_n هو ما نجعله ضِمن حدودٍ مُعيَّنة، ولكن النسبة بينهما.

قد يبدو من الخطأ أن ننظر إلى عددٍ ما على أنه يُساوي تقريبًا عددًا آخَر أكبرَ منه بمعدَّل 1000 مرة. ولكن، هذا ما عليه الحال لأننا عادةً ما نتعامل مع أعدادٍ صغيرة.

وبالطبع، من السهل أن نُدرك أن العدد 17 لا يساوي تقريبًا العدد 13895، ولكن ليس غريبًا أن نقول إن عددَين مثل

2904756294089761562389545345987608890796872347514348757

775468

و

3609823459872097612349870982498634087623457796784587345987

7166464

بوجهٍ عام، لهما نوعُ الحجمِ نفسُه. ومع أن الثانيَ أكبرُ بما يَزيد عن 1000 مرة، فإن عدد الأرقام في كِلَيهما متساوٍ — ما بين 60 و65. وفي غياب خصائص أخرى مهمة، قد يكون هذا هو كلَّ ما نهتمُّ له.

حتى عندما تتطلَّب هذه الدرجةُ من التقريب الكثيرَ للغاية، فإنه حريٌّ بالمرء غالبًا محاولةُ إيجاد مُتتابعتَين $b_1, b_2, b_3, \ldots$ و$c_1, c_2, c_3, \ldots$ يمكنه أن يُبرهن فيهما على أنَّ b_n أقل دائمًا من a_n وأن c_n أكبر دائمًا. وعليه، يمكن للمرء القولُ إن b_n «حدٌّ أدنى» بـ a_n، وc_n «حدٌّ أعلى». على سبيل المثال، ربما يقول عالِمُ رياضيات يُحاول تقدير كميةٍ ما a_n «لا أعرف، ولو حتى تقريبيًّا، ما قيمة a_n، ولكن يمكنني إثباتُ أنها تساوي على الأقل $n^2/2$ ولا تَزيد عن n^3». إذا كانت المسألة صعبةً بالقدر الكافي، فإن نظريةً كهذه يمكن أن تكون إنجازًا مهمًّا.

(٣) كلُّ ما تحتاج إلى معرفته عن اللوغاريتمات والجذور التربيعية وغيرهما

أحدُ الأسباب في أنَّ عمليات التقدير والتقريب المنتشرةَ في الرياضيات ليست معروفةً خارج المقرَّرات، هو أنه لكي نتحدَّثَ عنها فإننا نستخدم عباراتٍ مثل «بسرعةِ تزايُد منحنى $\log n$ تقريبًا» أو «الجذر التربيعي بـ t، حتى ثابتٍ ما»، وهو ما يعني القليلَ لمعظم الناس. ولحُسن الحظ، إذا كان المرءُ مهتمًّا فقط بالقِيَم التقريبية للُّوغاريتمات أو الجذور التربيعية للأعداد الكبيرة، فإنه يمكن فَهمُها بسهولةٍ تامة، وكذلك هذه اللغة.

إذا كان لدَيك عددان صحيحان كبيران موجَبان m وn وكنتَ ترغب في تقديرٍ تقريبي سريع لحاصل ضربهما mn، فما الذي ينبغي أن تفعلَه؟ من الجيد أن تبدأ بعَدِّ أرقام m وأرقام n. إذا كان m يتكوَّن من عدد h من الأرقام وكان n يتكوَّن من عدد k من الأرقام، فإن t يقع بين 10^{h-1} و10^h، وn يقع بين 10^{k-1} وh^{10k}، وهذا يعني أن mn يقع بين 10^{h+k-2} و10^{h+k}. ومن ثَمَّ، يمكنك عن طريق عَدِّ الأرقام في كلٍّ من m وn أن تُعيِّن mn على أنه يقع «ضمن معامل 100»؛ وهذا يعني أنَّ mn يجب أن يقع بين 10^{h+k-2} و10^{h+k}، وأن 10^{h+k}) أكبرُ بمعدَّل 100 مرة فقط من 10^{h+k-2}). أما إذا اخترتَ أن تقديرك هو 10^{h+k-1}، فسيكون الفارق بين تقديرك وmn معامل 10 على الأكثر.

بعبارةٍ أخرى، إذا كنتَ مُهتمًّا بالأعداد «حتى ثابت ضربي مُعيَّن»، فإن عملية الضرب تصبح فجأةً سهلةً جدًّا: خُذْ m وn، عُدَّ الأرقامَ التي يتكوَّن منها كلُّ عددٍ منهما، اطرح واحدًا (إذا كنتَ مهتمًّا)، واكتب عددًا به هذا العددُ من الأرقام. على سبيل المثال، حاصل ضربِ العددَين 1293875 (المكوَّن من 7 أرقام) و20986759777 (المكوَّن من 11 رقمًا) يُساوي نحوَ 10000000000000000 (17 رقمًا). إذا أردتَ تحرِّيَ مزيدٍ من الدقة، فيمكنك ملاحظةُ أن العدد الأول يبدأ بـ 1 والثاني بـ 2، وهو ما يعني أن 20000000000000000 يمثل تقديرًا أفضل، ولكن لا داعيَ لهذه الدقة؛ لأغراضٍ كثيرة.

بما أن الضرب التقريبيَّ سهل، فإن الجذر التربيعيَّ التقريبي سيكون سهلًا كذلك (فقط عوِّضْ عن العدد بعددٍ جديد له ضِعفُ عدد الأرقام). وبناءً على ذلك، فإن قسمة عدد الأرقام للعدد n على 2 تُقارب الجذرَ التربيعيَّ للعدد n. وبالمثل، فإن قسمة عددِ الأرقام على 3 تُقارب الجذرَ التكعيبي. وبوجهٍ أعم، إذا كان n عددًا صحيحًا كبيرًا وt عددًا موجبًا، فإن عدد الأرقام في n^t سيَزيد عن عدد الأرقام في n بنحوِ عدد t من الأرقام.

وماذا عن اللوغاريتمات؟ من منظور التقريب، فإنها سهلةٌ جدًّا في واقعِ الأمر: لوغاريتم العدد هو تقريبًا عددُ الأرقام التي يحتويها. على سبيل المثال، لوغاريتم العدد 34587 ولوغاريتم العدد 49234879754873 5 هما تقريبًا 5 و5 على الترتيب.

في الواقع أن حساب عدد الأرقام في عددٍ ما يُقارب لوغاريتم هذا العدد للأساس 10، وهو العدد الذي تحصل عليه بالضغط على مِفتاح LOG على حاسبة الجيب. عندما يتحدَّث علماءُ الرياضيات عن اللوغاريتمات، فإنهم عادةً ما يقصدون إلى ما يُسمَّى باللوغاريتم «الطبيعي»، وهو لوغاريتم للأساس e. ومع أن العدد e مُهم وطبيعي جدًّا، فإن كل ما نحتاج إلى معرفته عنه هنا هو أن اللوغاريتم الطبيعيَّ لعددٍ ما، وهو العدد الذي تحصل

عليه بالضغط على مفتاح LN على الآلة الحاسبة، هو تقريبًا عدد الأرقام المُكوِّنة للعدد مضروبًا في 2.3. وعليه، فإن اللوغاريتم الطبيعيَّ للعدد 2305799985748 يساوي تقريبًا $29.9 = 2.3 \times 13$. (إذا كنتَ على درايةٍ باللوغاريتمات، فستعرف أن ما ينبغي الضربُ فيه هو $\log_e 10$.)

يمكن عكس هذه الطريقة. افترِض أن لدَيك عددًا ما t وتعرف أنه اللوغاريتم الطبيعي لعددٍ آخَر n. هذا العدد n يُسمَّى دالة العدد أويلر مرفوعًا للقوة t ويُكتَب e^t. ما هو العدد n تقريبيًا؟ حسنًا، للحصول على t من n، نحسب عددَ الأرقام التي يتكوَّن منها n، ونضرب في 2.3. وعليه، فإن عدد الأرقام للعدد n يجب أن تساويَ تقريبًا $t/2.3$. وهذا يُحدِّد لنا العدد n، على الأقل تقريبيًّا.

الاستخدام الرئيسي للتقديرات التقريبية التي أعطيتُها توًّا أنها تُتيح للمرء إجراءَ مقارنات. على سبيل المثال، من الواضح الآن أن لوغاريتم عددٍ كبير ما n سيكون أصغرَ كثيرًا من الجذر التكعيبي لهذا العدد: إذا كان n مكوَّنًا من 75 رقمًا، مثلًا، فإن الجذر التكعيبيَّ له سيكون كبيرًا جدًّا — يتكوَّن من نحو 25 رقمًا — ولكن اللوغاريتم الطبيعي له سيكون نحو $172.5 = 2.3 \times 75$. وبالمثل، فإن دالة العدد أويلر مرفوعًا لقوة عدد ما m سيكون أكبرَ كثيرًا من قوة مثل m^{10}: على سبيل المثال، إذا كان m مكوَّنًا من 50 رقمًا، فإن m^{10} يتكوَّن من نحوِ 500 رقم، ولكن عدد الأرقام في e^m نحوُ $m/2.3$، وهو أكبر بكثيرٍ من 500.

توضح القائمة التاليةُ النتائجَ التقريبية لتطبيق عمليات مختلفة على العدد $n = 941192$. لم أُضف e^m؛ لأنني لو أضفتُه، لاضطُرِرتُ إلى تغيير عُنوان هذا الكتاب.

n	941192
n^2	885842380864
$\sqrt{n}$	970.15
$\sqrt[3]{n}$	98
$\log_e n$	13.755
$\log_{10} n$	5.974

(٤) نظرية الأعداد الأولية

العدد الأوليُّ هو عددٌ صحيح أكبر من 1، لا يقبل القسمة على أيٍّ أعداد صحيحة أخرى، وهذا بالطبع باستثناء 1 والعدد نفسه. الأعداد الأوليَّة الأقلُّ من 150 هي 2 و3 و5 و7 و11 و13 و17 و19 و23 و29 و31 و37 و41 و43 و47 و53 و59 و61 و67 و71 و73 و79 و83 و89 و97 و101 و107 و109 و113 و127 و131 و137 و139 و149. جميع الأعداد الأخرى الأقل من 150 يمكن تحليلها إلى عواملها الأولية: على سبيل المثال، $13 \times 7 = 91$. (ربما تنزعج من الاستبعاد الاختياري على ما يبدو للعدد 1 من تعريف عددٍ أوليٍّ ما.) ولا يُعبر هذا عن حقيقةٍ مُتعمِّقة عن الأعداد: إنه مجردُ اصطلاح مُفيد اختِير بحيث تُوجَد طريقةٌ واحدة فقط لتحليل أيِّ عددٍ إلى أعدادٍ أوَّلية.

شغَلَت الأعدادُ الأولية أذهانَ علماء الرياضيات منذ الإغريق؛ لأنها على ما يبدو تتوزَّع توزيعًا عشوائيًّا إلى حدٍّ ما، ولكن ليس بشكلٍ كامل. لم يتوصل أحدٌ إلى قاعدة بسيطة تُخبرك بأكبرِ عدد أوَّلي ترتيبه n (يمكن بالطبع إعداد قائمة بأولِ عدد n من الأعداد الأولية، ولكنها ليست بقاعدةٍ سهلة، وستكون غيرَ عملية تمامًا إذا كان n عددًا كبيرًا)، ومن المستبعَد غالبًا وجودُ هذه القاعدة. ومن ناحيةٍ أخرى، فإن اختبار أولِ 35 عددًا أوليًّا يُظهر بعضَ السِّمات المهمة. إذا حسبتَ الفروق بين أعدادٍ أولية متتالية، فإنك تحصل على القائمة الجديدة التالية: $1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4, 6, 6, 2, 6, 4, 2, 6, 4, 6, 8, 4, 2, 4, 2, 4, 14, 4, 6, 2,$ 10. (أي إن: $2 - 3 = 1$ و$3 - 5 = 2$ و$5 - 7 = 2$ و$7 - 11 = 4$ وهكذا.) هذه القائمة ما زالت غيرَ مرتَّبةٍ إلى حدٍّ ما، لكن الأعداد بها تسير في اتجاهٍ مُعين، يكاد يكون ملحوظًا، وهو أنها آخذةٌ في التزايُد تدريجيًّا. ومن الواضح أنها لا تَزيد بانتظام، إلا أن أعدادًا مثل 10 و14 لا تظهر إلا مُتأخرةً تمامًا، في حينِ أن أول بِضعة أعداد تكون كلُّها 4 أو أقل.

إذا كتبتَ أولَ ألفِ عددٍ أولي، فإن اتِّساع الفجوة بين الأعداد المتتالية سيُصبح أكثرَ وضوحًا. بعبارةٍ أخرى، تبدو الأعدادُ الأوَّلية الكبيرة أقلَّ على أرض الواقع من الأعداد الصغيرة. وهذا هو المتوقَّع بالطبع؛ لأن هناك طرقًا عديدة «لا» يكون بها عددٌ كبيرٌ ما أوليًّا. على سبيل المثال، ربما خمَّنا أن العدد 10001 أوليٌّ، خصوصًا أنه لا يقبل القسمة على 2 أو 3 أو 5 أو 7 أو 11 أو 13 أو 17 أو 19، لكنه في الحقيقة يساوي 137×73.

لا يُوجَد عالمُ رياضيات له ثِقلُه سيَقنع بالملاحظة المَحضة (التي لم يُبرهَن حتى على صحَّتها) بأن الأعداد الأوَّلية الكبيرة أشدُّ نُدرةً من الأعداد الأولية الصغيرة. بل إنه سيرغب

في معرفة مدى نُدْرة هذه الأعداد. إذا اخترتَ عشوائيًّا عددًا ما يقع ما بين 1000001 و1010000، فما احتمالاتُ أن يكون هذا العددُ أوليًّا؟ بعبارةٍ أخرى، ما «كثافة» الأعداد الأولية القريبة من 1000000؟ هل كثافتها صغيرةٌ على نحوٍ مذهل أو صغيرةٌ جدًّا فحسب؟

نادرًا ما تتبادر هذه الأسئلةُ إلى أذهان الأشخاص الذين لم يتعرَّضوا للرياضيَّات في المستوى الجامعي؛ ذلك لأنهم يفتقرون إلى اللغة التي يستطيعون بها صياغةَ هذه الأسئلة والتفكيرَ فيها. ومع ذلك، إذا كنتَ قد استوعبتَ ما استعرضناه في هذا الفصل حتى الآن، فأنت في وضعٍ يُتيح لك أن تُقدِّر واحدًا من أعظم إنجازات الرياضيَّات، وهو: نظرية الأعداد الأوَّلية. تنصُّ النظرية على أن كثافة الأعداد الأولية قُرب عددٍ ما n تساوي نحو $1/\log_e n$، أي واحد مقسومًا على اللوغاريتم الطبيعيِّ للعدد n.

لنرَ مرةً أخرى احتمالاتِ أن يكون عددٌ عشوائي بين 1000001 و1010000 أوليًّا. كل الأعداد في هذا المدى العدديِّ تُساوي مليونًا بالتقريب. تقول نظرية الأعداد الأولية إنه بِناءً على ذلك فإن الكثافة ستُساوي تقريبًا 1 مقسومًا على اللوغاريتم الطبيعي لمليون. اللوغاريتم للأساس 10 هو 6 (في هذه الحالة، يُعطينا عَدَّ الأرقامِ الناتج 7، ولكن بما أننا نعرف الناتجَ الفعلي فإنه يجوز لنا استخدامُه)، وبذلك يكونُ اللوغاريتم الطبيعيُّ نحو 2.3×6 أو 13.8. وعليه، فإن عددًا واحدًا في كل 14 عددًا بين 1000001 و1010000 هو عدد أولي، وهو ما ينطبق على ما يزيد قليلًا عن 7% منها. وعلى النقيض من ذلك، فإن عددَ الأعداد الأوَّلية الأقلِّ من 100 هو 24، أو نحو رُبع العدد الكلي، وهو ما يوضح كيف أن الكثافة تقلُّ كلما كانت الأعداد الأولية أكبر.

بالنظر إلى الطبيعة العشوائية غيرِ المنتظمة للأعداد الأولية، فمن المدهِش تمامًا كَمُّ ما يمكن إثباتُه عنها. ومن المثير للاهتمام أن النظريات المتعلقةَ بالأعداد الأولية يكون إثباتُها عادةً عن طريق استغلال هذه العشوائية الظاهرية. على سبيل المثال، تنصُّ نظريةٌ مشهورة لعالم الرياضيات السوفييتي فينوجرادوف، أُثبِتَت عام ١٩٣٧، على أن كل عددٍ فردي كبير بدرجةٍ كافية يمكن كتابته على هيئةِ مجموع ثلاثة أعداد أولية. لا يسَعُني في هذا الكتاب أن أشرح كيف أُثبِتَ هذا، لكن ما لم يفعله هو إيجاد «طريقة» لكتابة الأعداد الفردية على هيئة مجموع ثلاثة أعدادٍ أولية. هذا النهج كان سيَئول حتمًا إلى الفشل؛ نظرًا إلى صعوبة تكوين الأعداد الأولية نفسِها. بدلًا من ذلك، بنى فينوجرادوف

على طريقة هاردي وليتلوود، وطرح حُجَّته على النحو التالي تقريبًا. لنفترض أنك اخترتَ متتابعةً عشوائية حقًّا من الأعداد، لها كثافةُ الأعدادِ الأوليةِ نفسُها تقريبًا، في هذه الحالة يمكن لنظريةٍ أوَّلية عن الاحتمال أن تُبرهن على أنك ستتمكَّن على نحوٍ شبهِ مؤكَّد من كتابةِ جميع الأعداد الكبيرة بدرجةٍ كافية على هيئة مجموع ثلاثةٍ من أعداد هذه المتتابعة. في الحقيقة، يُمكنك القيامُ بذلك بطرقٍ كثيرة مختلفة. ولأن توزيع الأعداد الأولية شبهُ عشوائي (الجزء الصعب من البرهان أن نُوضِّح ما يَعنيه هذا، ثم نُبرهن على صحته بدقَّة)، وأنها تسلك مسلكَ المتتابعة العشوائية، فإنَّ جميع الأعداد الكبيرة بدرجةٍ كافية هي مجموع ثلاثة أعدادٍ أوَّلية، ومرةً أخرى بطرقٍ كثيرة مختلفة. ومن باب توضيح هذه الظاهرة فحسب، نستعرض فيما يلي كلَّ الطرق التي يمكن بها كتابة العدد 35 على هيئة مجموعِ ثلاثة أعداد أولية:

$$35 = 2 + 2 + 31 = 3 + 3 + 29 = 3 + 13 + 19 = 5 + 7 + 23$$

$$= 5 + 11 + 19 = 5 + 13 + 17 = 7 + 11 + 17 = 11 + 11 + 13.$$

يغلب هذا الطابَعُ على كثيرٍ من الأبحاث المتعلقة بالأعداد الأولية. في بادئ الأمر، عليك أن تستنبطَ نموذجًا احتماليًّا للأعداد الأولية؛ أي إنك تتظاهر بأنها اختِيرَت طبقًا لإجراءٍ عشوائيٍّ ما. وبعدها، اختبر الاحتمالات التي من المنتظَر تحقُّقها في حالِ كانت الأعداد الأولية قد كُوِّنَت حقًّا بطريقةٍ عشوائية. هذا يُتيح لك تخمينَ إجاباتِ كثيرٍ من الأسئلة. وأخيرًا، حاول إثباتَ أن النموذج واقعيٌّ بما يكفي لأن تكون تخميناتُك صحيحة على نحوٍ تقريبي. لاحظ أن هذا النهج سيكون مستحيلًا إذا اضطُررتَ إلى إعطاء إجاباتٍ محددة في كل مرحلةٍ من البرهان.

من المثير للاهتمام أن النموذج الاحتمالي ليس بنموذجٍ لظاهرةٍ مادية، ولكنه نموذجٌ لجزء آخَر من الرياضيات. وعلى الرغم من أن الأعداد الأولية محدَّدةٌ بصرامة، فإنها تبدو بطريقةٍ ما كأنها بياناتٌ تجريدية. وبمجرد أن ننظُر إليها على هذا النحو، يُحرِّضنا ذلك على ابتكار نماذجَ بسيطةٍ تُتيح لنا التنبُّؤ بالإجابات الممكِنة عن بعض هذه الأسئلة الاحتمالية. وفي الحقيقة، أدَّت هذه النماذج أحيانًا إلى براهينَ صحيحة للأعداد الأولية نفسِها.

ومع أن هذا الأسلوب في طرح الحُجة قد حقَّق نجاحًا ملحوظًا، فإنه لم يَحسِم كثيرًا من المشكلات المشهورة. على سبيل المثال، تؤكِّد حدسية جولدباخ أن كلَّ عددٍ زوجي أكبرَ من 4 هو مجموع عددَين أوليَّين فردِيَّين. تبدو هذه الحدسية أصعبَ كثيرًا من السؤال الذي أجابه فينوجرادوف فيما يتعلق بالأعداد الأوَّلية الثلاثة. كما تُوجَد حدسيةُ العددَين الأوليَّين التوءمَين، التي تنصُّ على أن هناك عددًا لا نهائيًّا من أزواج الأعداد الأولية الفرقُ بينهما 2، مثل 17 و19، أو 137 و139. بعبارةٍ أخرى، إذا حسبتَ الفروق المتتالية، كما فعلتُ أعلاه، فإن العدد 2 يتكرَّر ظهوره للأبد (وإن كان بوتيرةٍ أقلَّ في كل مرة).

ربما تكون فرضيةُ ريمان هي أشهرَ مسألةٍ غيرِ محسومة في الرياضيات. ولهذه الفرضية العديدُ من الصِّيَغ المتكافئة. تعني إحداها بدقةٍ التقديرَ المُعطَى بنظرية الأعداد الأولية. وكما قلتُ، فإن نظرية الأعداد الأولية تُخبرك بالكثافة التقريبية للأعداد الأوَّلية القريبة من أيِّ عددٍ مُعطًى. ومن هذه المعلومة، يمكن للمرء أن يحسب بالتقريب عددَ الأعداد الأولية الموجودة وصولًا إلى أي عددٍ مُعطًى n. لكن إلى أي درجةٍ يكون التقريب؟ إذا كان $p(n)$ هو عدد الأعداد الأولية الصحيح حتى n، وكان $q(n)$ هو التقدير المقترَح طبقًا لنظرية الأعداد الأولية؛ فإن فرضية ريمان تُؤكِّد على أن الفرق بين $p(n)$ و$q(n)$ لن يزيد كثيرًا عن $\sqrt{n}$. لو أن هذا النوع من الدقة قد ثبَتَت صحته، لَأصبح له الكثيرُ من التطبيقات، إلا أنه معروفٌ حتى الآن أنه أضعفُ كثيرًا.

(٥) خوارزميات الفَرْز

يُوجَد قسمٌ آخر في الرياضيات مليءٌ بالتقديرات التقريبية، وهو علوم الكمبيوتر النظرية. إذا كتبَ المرءُ برنامجَ كمبيوتر لأداء مهمةٍ مُعيَّنة، فمِن الجيد إذن أن يُراعى في تصميمه التشغيلُ بأقصى سرعةٍ ممكنة. يطرح علماءُ الكمبيوتر النظريون السؤالَ التالي: ما أسرعُ برنامج يمكن أن نأمُلَه؟

من غير الواقعي غالبًا أن نبحثَ عن إجابةٍ محددة عن هذا السؤال؛ ولذا يُحاول المرء إثباتَ جملٍ مثل «تشغيل الخوارزمية التالية يتمُّ في نحوِ n^2 من الخطوات عندما يكون حجمُ الإدخال n.» ويمكن أن نَستنتجَ من ذلك أن الكمبيوتر الشخصيَّ النموذجي سيتمكَّن من معالجة حجم إدخال (وهو ما يعني بوجهٍ عام كمَّ المعلومات التي تريده أن يُحلِّلها) مقدارُه 1000 وليس حجم إدخال مقداره 1000000. وعليه، فإن هذه التقديرات ذاتُ أهميةٍ عَملية.

تُعرَف إحدى المهامِّ المفيدة للغاية التي يمكن إنجازها باستخدام أجهزة الكمبيوتر باسم الفرز؛ أي ترتيب عددٍ كبير من العناصر وفقًا لمعيارٍ مُعطًى. لتصوُّرِ هذا، افترض أنك تريد ترتيبَ مجموعة من العناصر (ليس بضرورةٍ أن تكون جمادًا؛ بل يمكن — مثلًا — أن تكون أشخاصًا مرشَّحين لوظيفةٍ ما) حسَبَ الأفضلية. افترض أنك لا تستطيع تعيين قيمةٍ عدديةٍ بالقدْر الذي تُحبه إلى أي عنصرٍ مُعطًى، ولكن — بمعلوميةِ أيِّ عنصرَين، يمكنك دائمًا أن تُقرر أيُّهما تُفضِّله. افترض أيضًا أن تفضيلاتك متَّسقة، بمعنى أنك لا تُفضِّل أبدًا A على B، وB على C، وC على A. إذا كنتَ لا تُريد قضاءَ وقتٍ طويل في تنفيذ المهمة، فمن الجيد أن تُحاول تقليل عدد المقارنات التي تُجريها.

عندما يكون عدد العناصر صغيرًا جدًّا، فإنه من السهل التوصلُ إلى كيفية القيام بذلك. فمثلًا إذا كان هناك عنصران، فإنه يتعيَّن عليك إجراءُ مقارنةٍ واحدةٍ على الأقل، وبمجرد الانتهاء منها فإنك تعرف ترتيبهما. وإذا كان هناك ثلاثةُ عناصر A وB وC، فإن مقارنةً واحدة لن تكفي، إلا أن عليك أن تبدأ بمقارنةٍ ما، ولا يُهم أيُّها. افترض، فيما يخصُّ هذه الحجة، أنك تُقارن بين A وB وتُفضِّل A. عليك الآن مقارنة A أو B مع C. إذا قارنتَ A مع C وفضَّلت C على A، فاعلم أن الترتيب تبعًا لتفضيلك هو C، A، B. ولكن، إذا وجدتَ، كما قد يحدث، أنك تفضِّل A على C، فإن كل ما تعرفه عن B وC أنك تُفضِّل A على أيٍّ منهما. وعليه، سيكون عليك إجراء مقارنة ثالثة حتى يمكن أن تضع ترتيبًا بـ B وC. ومن ثَمَّ، دائمًا ما تكفي ثلاث مقارنات، وأحيانًا يقتضي الأمر ذلك.

ماذا يحدث في حالة وجودِ أربعة عناصر A وB وC وD؟ يُصبح التحليل أكثرَ تعقيدًا. ربما تبدأ أيضًا بمقارنة A مع B. ولكن عندما تفعل ذلك، يكون لدَيك احتمالان مختلفان فيما يخصُّ المقارنة التالية. فإما أن تُقارن أيًّا من A أو B مع C، أو تقارن C مع D، ومن غير الواضح أيُّ الفكرتَين أفضل.

افترض أنك قارنتَ B مع C. إذا كنتَ محظوظًا، فستتمكن من ترتيب A وB وC. افترض أن الترتيبَ هو A، B، C. عندئذٍ، يبقى أن ترى الموضعَ الذي ستقعُ فيه D في هذا الترتيب. وأفضلُ شيء لتحديد ذلك هو مقارنة D مع B. وبعد ذلك، ليس عليك إلا مقارنة D مع A (إذا فضَّلت D على B) أو مع C (إذا فضَّلت B على D). وبذلك، يُصبح لدينا أربعُ مقارنات إجمالًا — اثنتان لترتيب A وB وC، واثنتان لتحديد موضع D في هذا الترتيب.

نحن لم ننتهِ من تحليل المسألة؛ لأنك ربما لا يُحالفك الحظُّ مع A وB وC. ربما كلُّ ما ستستخلصه من أولِ مقارنتَين أن كلًّا من A وC مفضَّلٌ على B. عندئذٍ ستكون بصددِ

مشكلةٍ أخرى: هل من الأفضل مقارنةُ A مع C أو مقارنةُ D مع أيٍّ من A أو B أو C — وفي الحالة الثانية، هل ينبغي مقارنة D مع B أو مع أيٍّ من A أو C؟ وبمجرد الانتهاء من دراسة هاتَين الحالتَين والحالتَين الفرعيَّتَين، سيكون عليك أن تعرف ماذا عساه أن يحدث لو كانت المقارنةُ الثانية بين C وD.

أصبح التحليل مُضجِرًا إلى حدٍّ ما، ولكن لا يزال إجراؤه ممكنًا. يوضِّح هذا أنه يكفي عادةً إجراءُ خمس مقارناتٍ فحسب، أي إنك تحتاج أحيانًا إلى إجراء هذا العدد من المقارنات، وأن المقارنة الثانية يجب أن تكون فعلًا بين C وD.

المشكلة في حُجةٍ من هذا النوع أن عدد الحالات التي يتعيَّن دراستها تزداد بوتيرةٍ سريعة للغاية. وسيكون من المستحيل استنباطُ العدد اللازم بالضبط من المقارنات عندما يكون لدَينا، مثلًا، 100 عنصر — من المؤكَّد غالبًا ألا نعرف هذا العدد. (أتذكَّر جيدًا صدمتي عندما سمعتُ لأول مرة عالِمَ رياضياتٍ يُصرِّح باستحالة معرفة القيمة الفعلية لمقدارٍ مُعيَّن وأنها ستظلُّ مجهولة. أما الآن، فقد اعتدتُ على حقيقةِ أن هذه هي القاعدة وليست الاستثناء. المقدار المعنيُّ هنا هو عدد رمزي $R(5,5)$، وهو أصغر عدد n بحيث إنه في أيِّ مجموعة مكوَّنةٍ من عدد n من الأشخاص لا بد من وجود خمسةٍ يعرف بعضُهم بعضًا، أو خمسةٍ لا يعرف بعضهم بعضًا.) ومن ثمَّ، يحاول المرء بدلًا من ذلك إيجادَ الحدِّ الأعلى والحد الأدنى. في هذه المسألة، الحد الأعلى بـ $c_{\text{n}}m$ هو إجراء لفرز عدد n من العناصر باستخدام ما لا يزيد عن عدد $c_{\text{n}}c$ من المقارنات، والحد الأدنى بـ b_n هو إثباتٌ بأنه، أيًّا ما كنتَ ماهرًا، سيلزم أحيانًا إجراء عدد b_n من المقارنات. هذا مثالٌ على مسألةٍ حيث يقع أفضلُ حدٍّ أعلى معروفٍ وأفضل حدٍّ أدنى معروفٍ ضمن مُعامل ضربي أحدهما للآخر: من المعروف أنه حتى ثابتٍ ضربيٍّ مُعين، فإن عدد المقارنات اللازمة لفرز عدد n من العناصر هو $n \log n$.

إحدى الطرق لمعرفة السببِ في أهميَّة ذلك هو أن تُحاول وضْعَ إجراءِ فرزٍ بنفسك. عليك ببساطة أن تبدأ بإيجاد العنصر الذي يأتي في المقدمة، وتضَعَه جانبًا، ثم تُكرِّر. لإيجاد أفضلِ عنصر، قارِنْ أولَ عنصرَين، ثم قارِن العنصر الأفضل بينهما مع العنصر الثالث، ثم قارن العنصرَ الأفضل بين هذَين مع العنصر الرابع وهكذا. وبذلك، يتطلَّب الأمرُ إجراء عدد $n-1$ من المقارنات لإيجاد العنصر الأفضل، ثم عدد $n-2$ من المقارنات لإيجاد الأفضل في المرة التالية، وهكذا، فيُصبح لدَينا عدد $(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+1$ من المقارنات إجمالًا، وهو ما يبلغ نحوَ $n^2/2$.

ومع أن هذه الطريقة بديهية، فإن الأمر ينتهي بك في حالِ تطبيقها إلى مقارنة كلِّ زوجٍ من العناصر لديك؛ ولذا فهي غير فعَّالة (على الرغم من أنها سهلة التخطيط). عندما يكون n كبيرًا، فإن $n \log n$ يكون تحسينًا ذا معنًى تمامًا للمقدار $n^2/2$؛ لأن $\log n$ أصغرُ كثيرًا من $n/2$.

فيما يلي طريقة أخرى تُعرف باسم الفرز السريع، وليس هناك ما يضمن أن تكون أسرع، ولكنها عادةً ما تصلُ بنا إلى نتيجةٍ أسرع. وهي مُعرَّفة تَكْراريًّا (أي إنها معرَّفةٌ بدلالة حدودها) كما يلي. أولًا، اختَرْ أيَّ عنصرٍ من العناصر، ولْيكُن العنصر x، ورتِّب العناصرَ الأخرى في مجموعتَين: العناصر الأفضل من x والعناصر الأسوأ. يستلزم هذا إجراءَ عدد $n - 1$ من المقارنات. كلُّ ما عليك فعله الآن هو فرزُ المجموعتَين باستخدام طريقة «الفرز السريع». بمعنى أنه لكلِّ مجموعة، عليك أن تختار عنصرًا وتُرتِّب العناصر الأخرى في مجموعتَين أُخريَين، وهكذا. في العادة، عندما تُقسِّم مجموعةً إلى مجموعتَين فرعِيَّتَين، فسيكون بالحجم نفسِه تقريبًا، اللهم إلا لو لم يُحالفك الحظُّ في هذا. وعليه، يتضح أن عدد المقارنات التي تُجريها سيكون $n \log n$ تقريبًا. بعبارةٍ أخرى، تصلح هذه الطريقة عمومًا — وقد يكون هذا ما أمَّلته — في حدود ثابتٍ ضربي معين.

الفصل الثامن

بعض الأسئلة المتداولة

(١) هل صحيحٌ أن المَقدرة الرياضية لدى علماء الرياضيات تضمحلُّ ببلوغهم سنَّ الثلاثين؟

إنَّ هذه الخرافة، التي يعتقد قطاعٌ كبير من الناس في صحتها، تَستمدُّ رَواجها من تصوُّرٍ خاطئ عن طبيعة المقدرة الرياضية. يميل الناسُ إلى التفكير في علماء الرياضيات بوصفِهم عباقرة، والعبقرية في ذاتِها صفةٌ غامضة تمامًا، وُلِدَ بها قليلٌ من الناس، ولا تتأتَّى لأحدٍ سواهم أيُّ فرصةٍ لاكتسابها.

العلاقة بين السنِّ والإنجاز الرياضي تتفاوتُ كثيرًا من شخصٍ إلى آخر، وصحيحٌ أن بعض علماء الرياضيات قدَّموا أفضلَ أعمالهم وهم في العشرينيَّات من أعمارهم. ولكن، تجد الأغلبيةُ العظمى منهم أن معلوماتهم وخبراتهم تتطوَّر باطِّرادٍ على مدار حياتهم، وأنه على مدار أعوامٍ كثيرة قدَّم هذا التطوُّر تعويضًا كافيًا عن أيِّ تراجُعٍ مُفترَض في القدرات الذهنية «الفِطرية» — إن كان لهذا المفهوم معنًى من الأساس. صحيحٌ أنه ليس ثمة الكثيرُ من الطفرات الجوهرية التي حقَّقها علماءُ رياضياتٍ فوق سنِّ الأربعين، ولكن ربما يُعزى الأمرُ إلى أسبابٍ اجتماعية. ففي سنِّ الأربعين، من المُحتمَل أن يكون الشخص القادر على تحقيق مثلِ هذه الطفرة قد أصبح مشهورًا نتيجةً لعملٍ سابق، وربما لا يُوجَد لدَيه الشغفُ الموجود لدى عالِم الرياضيات الأصغرِ سنًّا، والأقلِّ شهرة. ولكن هناك الكثير من الأمثلة المناقضة لهذا، وبعض علماء الرياضيات يواصِلون مسيرتهم بحماسٍ لا يَفتُر بعد سنِّ التقاعد.

بوجهٍ عام، فإن النظرة الشائعة التي تُصوِّر عالِم الرياضيات في قالَبٍ نمَطي بأنه شخصٌ ربما يكون ذكيًّا جدًّا، ولكنه أيضًا غريب، غيرُ مُهندَم، عازفٌ عن الزواج، يميل إلى

العُزلة، ليست بقاعدة. صحيحٌ أنه يُوجَد القليلُ من علماء الرياضيات الذين ينطبق عليهم هذا القالَبُ إلى حدٍّ ما، ولكن لا شيء أكثر غباءً من اعتقاد أن المرء — في حال ما لم ينطبق عليه هذا القالبُ — لا يمكن أن يكون ماهرًا بالرياضيَّات. وفي الحقيقة أنه في حال ثبات كلِّ العوامل الأخرى، فإن أرجحية أن يكون المرءُ عالِمَ رياضياتٍ تكون أكبر. نسبةٌ ضئيلة للغاية من طلاب الرياضيات يُصبحون في نهاية المطاف علماءَ باحِثين في الرياضيات. والغالبية يتعثَّرون في مرحلةٍ مبكرة؛ لافتقداهم الاهتمامَ مثلًا، أو لعدم وصولهم إلى مرحلة الإعداد للدكتوراه، أو لحصولهم على دكتوراه ولكن دون حصولهم على وظيفةٍ بالجامعة. وفي رأيي، الذي لا أظنُّ أنني الوحيدُ فيه، أنه من بين أولئك الذين يجتازون تلك العقَبات المختلفة، تُوجَد عادةً نسبةٌ ضئيلة للغاية من الشخصيات الفَذَّة مقارنةً بعدد هؤلاء في مجتمع الطلاب.

وفي حين أن الصورة السلبية عن علماء الرياضيات قد تكون مُدمِّرة، من حيث أنها تُنحِّي جانبًا الأشخاصَ الذين لولا تنحيتُهم لظهر شغَفُهم بالرياضيات ولَتجلَّت مهارتهم فيها، فالضررُ المترتِّب على كلمة «عبقري» أبلغُ أثرًا وأكثرُ ضررًا. فيما يلي تعريفٌ تقريبيٌّ وبسيط للشخص «العبقري»: هو شخصٌ يستطيع أن يؤدِّيَ بسهولة، وفي سنٍّ صغيرة، شيئًا لا يستطيعه أيُّ إنسانٍ آخَر تقريبًا، إلا بعد سنواتٍ من الممارسة، إنْ حدث واستطاع ذلك من الأساس. تتَّسِم إنجازات العباقرة بأن لها طابعًا غامضًا يُشبه السحر — يبدو الأمر كأنَّ عقولهم لا تعمل بكفاءةٍ أكبرَ من عقولنا فحسب، بل وبطريقةٍ مختلفة تمامًا. كل عامٍ أو عامَين، يلتحِق طالبُ رياضياتٍ بجامعة كامبريدج، يستطيع عادةً أن يحلَّ في دقائق معدودة مسائلَ يستغرق معظمُ الأشخاص، بمَن فيهم مَن يُفترض أنهم يدرسونها، عدةَ ساعات أو أكثر في حلِّها. عندما نلتقي شخصًا كهذا، فإنه لا يسَعُنا إلا أن نخطوَ خطوةً إلى الوراء ونُبدِيَ له إعجابنا به وتقديرَنا له.

ومع ذلك، فأولئك الأشخاص الفائقون للعادة ليسوا دائمًا أنجحَ العلماء الباحثين في مجال الرياضيات. إذا رغبتَ في حلِّ مسألةٍ حاولَ علماءُ الرياضيات المحترفون قبلك حلَّها ولكنهم لم يُفلحوا، فإنه من بين الصفات الكثيرة التي سوف تحتاج إليها، ستكون العبقرية — حسبما عرَّفتها — غيرَ ضرورية وغيرَ كافية. لنتناول مثالًا بارزًا يوضح ذلك، أثبتَ أندرو وايلز (في عمرٍ يزيد قليلًا عن الأربعين) مُبرهَنة فيرما الأخيرة (التي تنصُّ على أنه إذا كانت x وy وz وn أعدادًا صحيحة مُوجَبة وn أكبر من 2، فإن $x^n + y^n$ لا

يمكن أن تُساوي z^n) وبذلك حلَّ أشهرَ مسألةٍ غيرِ محسومة في الرياضيات على مستوى العالم، ومن ثَمَّ فلا شك أنه ذكيٌّ جدًّا، ولكنه ليس عبقريًّا بمفهومي الذي طرحتُه.

لعلك تتساءل الآن كيف عَساه أن يفعل ما فعَله لو لم يكن لدَيه نوعٌ من القدرة الذهنية الفائقة الغامضة؟ الإجابة هي أنه على الرغم من براعة الإنجاز الذي قدَّمه، فإنه ليس بارعًا بحيث يكون عَصِيًّا على التفسير. ولا أعرف بالضبط مُقوِّمات النجاح التي ساعَدَته، ولكن لا بد أن الأمر تطلَّب منه التحلِّيَ بقدرٍ هائل من الشجاعة، والعزم، والصبر، ومعرفةً واسعة بأبحاثٍ صعبة للغاية أجراها آخَرون غيرُه، وكذلك الحظ الجيد الذي أدخَلَه في مجال الرياضيات المناسِب في الوقت المناسب، فضلًا عن قدرةٍ استراتيجية استثنائية.

تُعَدُّ هذه الصفةُ الأخيرة، في نهاية الأمر، أهمَّ من السرعة الذهنية الفذَّة: أبلغ الإسهامات في مجال الرياضيَّات يُقدِّمها غالبًا علماءُ رياضيات في بُطء السلحفاة وليس علماء رياضياتٍ في سرعة الأرانب البرية. وكلما تطوَّرَت قدراتُ علماء الرياضيات، فإنهم يتعلمون الحِيلَ الرياضية المختلفة، وهو ما يُعزى في جزءٍ منه إلى أبحاثِ علماء الرياضيات الآخَرين، ويُعزى في جزءٍ آخَر إلى ساعاتٍ طويلة قضَوْها في التفكير في الرياضيات. وما يُحدِّد إن كان بإمكانهم استخدامُ خبراتهم لحلِّ المسائل المستعصية، يُعنى إلى حدٍّ بعيد، بالتخطيط الدقيق: محاولةُ حلِّ مسائلَ من المحتمَل أن تكون مثمرةً، ومعرفة الوقت الذي ينبغي فيه التخلِّي عن خطٍّ مُعيَّن في التفكير (وهو قرارٌ يصعب اتخاذُه)، والقدرة على رسم خطوطٍ عريضة وواضحة للحُجَج، وهي خطوةٌ تأتي أحيانًا قبل كتابة التفاصيل. وهذا يتطلَّب مستوًى من النضج لا يتعارَض بأي حالٍ مع العبقرية، ولكنه لا يكون مُلازمًا لها على الدوام.

(٢) لماذا لا يُوجد سوى عددٍ قليل جدًّا من عالمات الرياضيات؟

إنه لَمِن المُغري تجنُّبُ هذا السؤال؛ لأن الإجابة عنه تُقدِّم فرصةً سانحة لإثارة الاستياء. ومع ذلك، فإن النسبة الصغيرة من النساء الموجودة، حتى اليوم، في أقسام الرياضيات على مستوى العالم، ملحوظةٌ جدًّا، وتُمثِّل حقيقةً مُهمَّة للغاية في واقع الرياضيات، حتى إنني أشعر أن لِزامًا عليَّ أن أقول شيئًا في هذا الصدد، حتى إذا كان ما أقوله لا يَعْدو أكثرَ من أنني أرى الوضعَ محيِّرًا ومؤسِفًا.

هناك نقطةٌ جديرة بالاعتبار، وهي أن قلةَ أعداد النساء في الرياضيات هي ظاهرةٌ إحصائية أخرى: تُوجَد عالمات رياضيات على قدرٍ جيد جدًّا من المهارة، وعلى غِرار

نظائرهن من علماء الرياضيات، لديهن الكثيرُ من الطرق المختلفة التي يتَميَّزن بها، بما فيها أحيانًا أن يكنَّ عبقريات. ولا يُوجَد دليلٌ مادي، أيًّا كان، على وجود حدٍّ أعلى من أي نوع لِما يمكن أن تُحققه النساءُ في الرياضيات. يقرأ المرء بين الفَينة والفينة أن الرجل أفضلُ أداءً في بعض الاختبارات العقلية للقدرة البصَرية المكانية، مثلًا، ويُقترَح أحيانًا أن هذا راجعٌ إلى تسيُّدِهم في الرياضيات. ولكن، هذه الحُجة غيرُ مُقنِعة تمامَ الإقناع: القدرة البصرية المكانية يمكن أن تتطوَّر وتُصقَل بالممارسة، وعلى أي حال، فمع أنها قد تكون مفيدةً لعالم الرياضيات، فإنها نادرًا ما تكون ضرورية.

السبب الأكثر معقوليةً هو فكرة أن العوامل الاجتماعية مهمة: أمام كلِّ فتًى فخورٍ بمقدرته الرياضية، توجد فتاةٌ يَعتريها الحَرج لتفوُّقِها في مهنةٍ يَنظُر إليها المجتمعُ على أنها غيرُ أُنثَوية. بالإضافة إلى ذلك، الفتيات الموهوبات في الرياضيات لديهنَّ نماذجُ قليلة يُحتذَى بها، ومن ثمَّ فإن الوضع سرمدي. وثَمة عاملٌ اجتماعي آخرُ قد يتجلَّى أثرُه في مرحلةٍ لاحقة، وهو أن الرياضيات تتطلَّب — أكثر من مُعظم التخصصات الأكاديمية الأخرى — عقليةً مُتفردة من طِراز معيَّن، وهو ما يصعب — وإن كان بالتأكيد ليس مستحيلًا — أن يجتمع مع الأمومة. لقد قالت الروائيةُ كانديا ماكويليام مرةً إن كلَّ ابنٍ من أبنائها كلَّفها كتابَين؛ لكن يظلُّ من الممكن على الأقل تأليفُ روايةٍ بعد بِضع سنواتٍ من التوقُّف عن التأليف. أما إذا تخلَّيتَ عن الرياضيات بضعَ سنواتٍ، فإنك تصبح كمَن يُقلِع عن عادة، ونادرًا ما يمكن العودةُ إلى الرياضيات بعد ذلك.

اقتُرِحَ أن عالمات الرياضيات يَمِلن إلى التطوُّر في مرحلةٍ متأخرة عن نظائرهن من الرجال، وهذا يضَعُهن في وضعٍ غير مُواتٍ في الهيكل الوظيفي الذي يُكافئ الإنجازاتِ الأولى. تُؤكِّد ذلك القصصُ الحياتية لكثيرٍ من عالمات الرياضيات المرموقات، وإن كان تَقدُّمُهن المتأخِّر يُعزى بدرجةٍ كبيرة إلى الأسباب الاجتماعية المذكورة توًّا، ولكن مرةً أخرى يظلُّ هناك الكثيرُ من الاستثناءات.

مع ذلك، لا يبدو أيٌّ من هذه التفسيرات كافيًا. وبدلًا من الاستطراد في هذا الأمر، أرى أن الأفضل هو التنويهُ إلى تأليف الكثير من الكتب حول هذا الموضوع (راجِع جزء «قراءات إضافية»). وتعليقٌ أخير هو أن الوضع آخذٌ في التحسُّن: نسبة النساء بين علماء الرياضيات ازدادت باطِّرادٍ في السنوات الأخيرة، وعلى ضوء التغيُّر الذي شهده — وما زال يشهده — المجتمع بوجهٍ عام، من المؤكَّد تقريبًا أن يستمرَّ الحال على هذا المنوال.

(٣) هل الرياضيات والموسيقى مُتلازِمتان؟

على الرغم من حقيقةِ أن كثيرًا من علماء الرياضيات غيرُ موسيقيِّين بالمرة، وأن قليلًا من الموسيقيِّين لهم اهتماماتٌ بالرياضيات، فثَمة معلومةٌ يُروَّج لها باستمرار بأنهما متَّصلتان. ونتيجةً لذلك، من غير المستغرَب أن نعلم عن عالم رياضياتٍ ما أنه عازفٌ جيد جدًّا للبيانو، أو أنَّ لدَيه هوايةَ التأليف الموسيقي، أو أنه يحبُّ الاستماع إلى موسيقى باخ.

تُوجَد الكثير من الأدلة السردية التي تُشير إلى أن علماء الرياضيات ينجذبون إلى الموسيقى أكثرَ من أي ضربٍ آخَر من الفنون، وقد زعَمَت بعضُ الدراسات أنها أثبتَت أن الأطفال الذين لدَيهم ثقافةٌ موسيقية يكون أداؤهم أفضلَ في المواد العلمية. ومن غير الصعب تخمينُ الأسباب. فعلى الرغم من أن التجريد مُهمٌّ في جميع الفنون، وأن للموسيقى مُكونًا تمثيليًّا، فإن الموسيقى هي الفن التجريدي الأكثرُ وضوحًا: جزءٌ كبير من مُتعة الاستماع إلى الموسيقى ينبع من تقديرٍ مباشر، إن لم يكن وعيًا كاملًا، لهذه الأنماط الخالصة من دون أيِّ معنًى جوهري.

ولسوء الحظ، فإنَّ الأدلة السردية يدعمها القليلُ جدًّا من العلوم الطبيعية. حتى إنه من غير الواضح نوعيةُ الأسئلة التي ينبغي طرحُها. فما الذي سنتعلَّمه في حالِ جُمِعَت بياناتٌ ذات دلالة إحصائية تُوضح أن نسبة علماء الرياضيات الذين يعزفون على البيانو أعلى منها في غيرِ علماء الرياضيات، الذين لهم خلفيَّات اجتماعية وتعليمية مُماثلة؟ أعتقد أن هذه البيانات «يمكن» جمعُها، لكن سيكون الأهمُّ بكثير هو وضْعَ نظريةٍ يمكن اختبارُها بالطرق التجريبية، تُفسِّر هذه العلاقة. وفيما يخص الأدلةَ الإحصائية، فإن هذه النظرية ستكون أقيمَ كثيرًا لو أنها أكثرُ تحديدًا. الرياضيات والموسيقى مختلفتان للغاية؛ من الممكن أن يُولَع المرء وجْدانيًّا ببعض الجوانب ويكون غيرَ مهتمٍّ تمامًا بجوانبَ أخرى. هل تُوجَد علاقاتٌ أكبرُ وأكثر تعقيدًا بين الذَّوق الرياضي والذوق الموسيقي؟ إذا كان الأمر كذلك، فستكون هذه العلاقات أكثرَ إفادةً من العلاقات التبادُلية البسيطة بين مستويات الاهتمام في فروع المعرفة ككلٍّ.

(٤) لماذا لا تروقُ الرياضياتُ لعددٍ كبير حقًّا من الناس؟

لا يحدث كثيرًا أن نسمع أحدًا يُصرِّح بعدم حُبِّه للأحياء أو للأدب الإنجليزي. وبطبيعة الحال، لا تحظى هذه الموادُّ باهتمام الجميع، إلا أن الأشخاص الذين لا تروق لهم يتفهَّمون

جيدًا أنَّ ثمة آخَرين يُخالفونهم الرأي. على النقيض من ذلك، يبدو أن الرياضيات، والموادَّ ذاتَ المحتوى الرياضي الكثيفِ مثل الفيزياء، لا تُثير عدم الاكتراث فحسب، بل أيضًا كراهيةً فِطرية حقيقية. ما الذي يجعل الكثيرَ من الأشخاص يُحجِمون عن الموضوعات الرياضية بمجرد أن يَسْنَح لهم ذلك، ويتذكَّرونها بفزعٍ بقيةَ حياتهم؟

من المرجَّح أنها ليست الرياضيات في ذاتِها التي يراها الناسُ غيرَ جذَّابة على غِرار تجرِبة دروس الرياضيات، وهذا أمرٌ يمكن استيعابُه بسهولةٍ أكبر. ونظرًا إلى أن الرياضيات تعتمد باستمرارٍ على النتائج التي تتوصَّل إليها، فمن المهمِّ أن يبقى المرءُ مُواكبًا للرياضيات وعلى اطلاعٍ جيِّد بها أثناءَ تعلُّمها. على سبيل المثال، إذا لم تكن بارعًا بدرجةٍ معقولة في ضرب الأعداد المُكوَّنة من رقمَين، فربما لن يكون لدَيك استيعابٌ حَدْسي جيِّد لقانون التوزيع (ناقشناه في الفصل الثاني). ودون ذلك، فإنك لن تتمكَّن بسهولةٍ من ضرب الأقواس في تعبيرٍ مثل $(x + 2)(x + 3)$، ومن ثمَّ لن تفهم المعادلات التربيعية على النحوِ الصحيح. وإذا لم تفهم المعادلاتِ التربيعية، فلن تفهمَ لماذا تكون النسبة الذهبية $(1 + \sqrt{5})/2$.

تُوجَد علاقاتٌ متعدِّدة من هذا النوع، إلا أن مواكبةَ الرياضيات تستوجبُ ما هو أكثرُ من مجرد الطلاقة التقنية؛ أي القدرة على استخدامِ القواعد وتطبيقها بسهولة. في كثيرٍ من الأحيان، تُقدَّم فكرةٌ جديدة مهمة جدًّا وأكثرُ تعقيدًا على نحوٍ ملحوظ من اللاتي سبَقْنها، وكلٌّ منها يُتيح فرصةً للتخلُّف عن الرَّكْب. ومثالٌ واضح على هذا استخدامُ الحروف بدلًا من الأعداد، وهو ما يجده كثيرون مُحيِّرًا، وإن كان أساسيًّا لكلِّ فروع الرياضيات فوق مستوًى مُعيَّن. ومن الأمثلة الأخرى الأعدادُ السالبة، والأعداد المُركَّبة، وحسابُ المثلَّثات، ورفع الأعداد لقُوًى، واللوغاريتمات، ومبادئ حساب التفاضل والتكامل. أما أولئك الذين ليسوا على استعدادٍ لتحقيق القفزة المفاهيمية الضرورية عندما يُواجهون إحدى هذه الأفكار، فلن تكون لدَيهم قناعةٌ بكل الرياضيات المبنيَّة عليها. وسوف يعتادون تدريجيًّا فَهْم ما يقوله لهم مُعلِّمو الرياضيات فهمًا جزئيًّا. وبعد بضع قفزاتٍ أخرى يُغفِلونها، سيجدون أن هذا الفهم الجزئيَّ حتى مُبالَغٌ فيه. وفي غضون ذلك، سيرَون آخَرين في فصولهم يُواكبون الشرح دون أدنى صعوبةٍ على الإطلاق. فلا عجبَ أن تُصبح دروسُ الرياضيات، بالنسبة إلى الكثيرين، تجربةً مَريرة.

هل هذا ما يكون عليه الوضع حتمًا؟ هل بعض الناس مُقدَّر لهم حتمًا ألا يُحبُّوا الرياضيات في المدرسة؟ أم أنه قد يكون من الممكن تدريسُ مادة الرياضيات بطريقةٍ

مختلفة بحيث يكون عددُ المستبعَدين أقلَّ؟ أنا مُقتنع بأن أيَّ طفلٍ أُتيحَت له في سنٍّ مبكرة فرصةُ تَلقِّي تعليمٍ فردي في الرياضيات على يدِ مُعلِّم جيد ومُتحمِّس سيَنشأ مُحبًّا للرياضيات. هذا بالطبع لا يعني وضْعَ سياسةٍ تعليمية مناسبة على الفور، ولكنه يُشير على الأقل إلى وجودِ مَجال لتحسين طرقِ تدريس الرياضيات.

تنبع إحدى التوصيات من الأفكار التي أَكَّدتُ عليها في هذا الكتاب. لقد أشرتُ ضِمنيًّا فيما سبق إلى وجودِ تناقضٍ بين الطلاقة التقنية وبين استيعابِ المفاهيم الصعبة، ولكن يبدو أن أغلب مَن يُجيد أحدَ الأمرَين يُجيد الآخر. وبالفعل، إذا كان فهمُ موضوعٍ رياضي يتعلق إلى حدٍّ كبير بتعلُّمِ القواعد التي تحكمه أكثرَ من فَهْم جوهر الموضوع نفسِه، فإن هذا بالضبط ما يتوقَّعُه المرءُ — الفرق بين الطلاقة التقنية والفهم الرياضي أقلُّ وضوحًا ممَّا قد يتصوَّره المرء.

كيف تؤثر هذه الملاحظةُ على الممارسة داخل الفصل الدراسي؟ أنا لا أؤيد أيَّ تغيير ثوري — فقد عانت الرياضياتُ الكثيرَ من التغييرات الثورية بالفعل، إلا أن تغييرًا طفيفًا في التأكيد قد يُؤتي ثمارَه. على سبيل المثال، لنفترِض أن طالبًا ارتكبَ الخطأ الشائعَ في توهُّم أن $x^{a+b} = x^a + x^b$. سيُوضِّح المُعلِّم، الذي أكدَّ على المعنى الأساسيِّ لتعبيراتٍ مثل x^a، أن x^{a+b} تعني عدد $a + b$ من x مضروبًا في بعضه؛ أي x مضروبًا في نفسه بعدد a من المرات في x مضروبًا في نفسه بعدد b من المرَّات. ولسوء الحظ، فإن كثيرًا من الأطفال يجدون هذه الحُجة معقَّدةً للغاية بما يعوق استيعابَهم لها، وعلى أي حال فإنها لا تكون صحيحةً في حالة أن a وb ليسا عددَين صحيحَين موجبَين.

مثل هؤلاء الأطفالِ قد يستفيدون أكثرَ بالطريقة التجريدية. فكما أشرتُ في الفصل الثاني، كل ما تلزم معرفتُه عن القُوى يمكن استنتاجه من بعض القوانين البسيطة جدًّا، التي أهمُّها $x^{a+b} = x^a x^b$. في حال التأكيد على هذه القاعدة، فلن يقلَّ احتمالُ الوقوع في الخطأ السابق فحسب، بل سيسهل أيضًا تصحيحه: يمكن أن يُقال ببساطةٍ لِمَن يقعون في هذا الخطأ إنهم نَسُوا تطبيقَ القاعدة المناسبة. وبطبيعة الحال، من المهم أن نكون على درايةٍ بالحقائق الأساسية مثل أن x^3 يعني x مضروبًا في x مضروبًا في x؛ أي x مضروبًا في نفسه ثلاثَ مرات، إلا أن هذا يمكن تقديمُه نتيجةً للقاعدة وليس تفسيرًا لها.

لا أريد التنويه إلى ضرورة أن يُحاول المرء توضيحَ ماهيَّة الطريقة المجردة للأطفال، وإنما أريد التنويهَ ببساطةٍ إلى أن المعلِّمين ينبغي أن يكونوا على علمٍ بنتائجها. وأهمُّ هذه

النتائج أنه من الممكن جدًّا تعلُّمُ استخدامِ المفاهيم الرياضية بطريقةٍ سليمة دون معرفةِ ما تعنيه بالضبط هذه المفاهيم. وقد تبدو هذه فكرةً سيئة، لكن تدريس هذا الاستخدام غالبًا ما يكون أيسرَ من ذلك، وغالبًا ما يترتَّب على ذلك تلقائيًّا فهمٌ أعمقُ للمعنى، إن كان ثمة أيُّ معنًى عِلاوةً على الاستخدام.

(٥) هل يستخدم علماءُ الرياضيات الكمبيوتر في عملهم؟

الإجابة المختصَرة هي أن معظمهم لا يستخدمونه، أو على الأقل، لا يستخدمونه بطريقةٍ أساسية. وبطبيعة الحال، فإنهم مثل أيِّ شخص نجدهم لا يستغنون عن الكمبيوتر لمعالجة النصوص، ولتواصُلِ بعضهم مع بعض، بالإضافة إلى الدَّور المهم الذي صار يلعبه الإنترنت. تُوجَد موضوعاتٌ في الرياضيات تتضمَّن عملياتٍ حسابيةً طويلة وبغيضة، ولكن تُوجَد عمليات حسابية روتينية أساسًا لا بد من إجرائها، وتوجد برامجُ معالَجةٍ رمزية جيدةٌ جدًّا يمكن الاستعانة بها في إجراء هذه العمليات الحسابية.

ومن ثمَّ، فإن أجهزة الكمبيوتر مفيدةٌ جدًّا بوصفها أجهزةً توفِّر الوقت، وأحيانًا تكون مفيدةً جدًّا لدرجة أنها تُمكِّن علماءَ رياضياتٍ من اكتشاف نتائجَ لم يكن ممكنًا أن يكتشفوها بأنفسهم. ومع ذلك، فإن نوع المساعدة التي يمكن لأجهزة الكمبيوتر تقديمُها محدودٌ جدًّا. إذا تصادفَ أن مسألتك، أو في الأغلب مسألة فرعية، كانت واحدةً من الأقلية الصغيرة التي يمكن حلُّها ببحثٍ طويل ومتكرِّر، فالمساعدة تكون جيدةً وحسَنة. ولكن، من ناحية أخرى، إذا كنتَ متحيرًا وتحتاج إلى فكرةٍ ذكية، فإنه في الحالة الراهنة للتكنولوجيا لن يُقدِّم لك الكمبيوتر أيَّ مساعدةٍ على الإطلاق. في الواقع، معظم علماء الرياضيات يقولون إن أهمَّ أدواتهم هي قطعةٌ من الورق وشيء للكتابة به.

في رأيي، الذي هو رأيُ أقلية، أن هذا الوضع مؤقَّت، وأنه على مدار المائة سنة القادمة أو نحوها، سوف تتمكَّن أجهزةُ الكمبيوتر تدريجيًّا من إنجازِ ما يفوق بكثيرٍ ما يُنجزه علماء الرياضيات — ربما يبدأ الأمر بإعدادِ تمارينَ بسيطة لنا، أو توفيرِ أسبوعٍ كامل علينا في محاولة إثبات مُبرهنةٍ تمهيدية، لها تأويلٌ معروف يُوفر مثالًا مناقضًا (أتحدثُ هنا عن خبرةٍ متكررة)، وفي نهاية المطاف تحلُّ محلَّنا تمامًا. معظم علماء الرياضيات أكثرُ تشاؤمًا بكثير (أو هل عساه أن يكون هذا تفاؤلًا؟) حول مدى مهارةِ أجهزة الكمبيوتر في الرياضيات.

(٦) كيف يكون البحث في مجال الرياضيات ممكنًا؟

على العكس، ربما يسأل المرءُ ما الذي يدعو إلى المفارقة فيما يخصُّ إمكانيةَ البحث في الرياضيات؟ لقد ذكرتُ في هذا الكتاب العديدَ من المسائل غيرِ المحسومة، والأبحاثُ الرياضية تتضمن إلى حدٍّ بعيد محاولةَ حلِّ تلك المسائل وشبيهاتها. وإذا قرأتَ الفصل السابع، فستعرف أن إحدى الطرق الجيِّدة لتكوين أسئلةٍ هي أن تتناول ظاهرةً رياضية يصعُب تحليلها بدقة، وتُحاول أن تصوغ إقراراتٍ تقريبيةً عنها. واقتُرِحَت طريقةٌ أخرى في نهاية الفصل السادس: اختر مفهومًا رياضيًّا صعبًا، مثل المنطوية الرباعية الأبعاد، وستجد عادةً أنه حتى الأسئلة البسيطة حوله سيكون من الصعب جدًّا الإجابةُ عنها.

لو أن هناك شيئًا غامضًا فيما يخصُّ البحث الرياضي، فإنه لا يَكمُن في وجود أسئلةٍ صعبة — ففي الحقيقة من السهل جدًّا وضعُ أسئلةٍ صعبة غير واردة — وإنما يكمن في وجودِ ما يكفي من الأسئلة التي على مستوًى مناسبٍ من الصعوبة يجعل الآلافَ من علماء الرياضيات عالِقين فيها. ولكي يتحقَّق هذا؛ لا بد بالتأكيد أن تنطويَ على تَحدٍّ، ولكنها لا بد أيضًا أن تُقدم بصيصًا من الأمل في إمكانيةِ حلِّها.

(٧) هل حدث أبدًا أن حلَّ غير المحترفين المسائلَ الرياضيةَ المشهورة؟

الإجابةُ الأبسط والأقلُّ تضليلًا عن هذا السؤال هي النفيُ الصريح ﺑ «لا». يعلم علماءُ الرياضيات المحترفون في وقتٍ قريب جدًّا أن أيَّ فكرةٍ لدَيهم تقريبًا عن أي مسألة معروفة كانت لدى كثيرٍ من الناس قبلهم. ولكي تكون الفكرةُ جديدة، يجب أن تكون لها سِمةٌ ما تُفسِّر السببَ في أن أحدًا لم يُفكر فيها من قبل. قد يكون الأمر ببساطةٍ أن هذه الفكرة مبتكَرةٌ تمامًا وغير متوقَّعة، ولكن هذا نادرٌ جدًّا: بوجهٍ عام، إذا ظهرَت فكرةٌ ما، فإنها تظهر لسببٍ وجيه ولا تأتي من العَدم. وإذا كانت قد تبادرَت إليك، فما المانع في أن تكون قد تبادرَت إلى غيرك؟ أحد الأسباب الأكثرِ معقوليةً أن هذه الفكرة متعلقةٌ بأفكارٍ أخرى غير معروفةٍ على وجه الخصوص، لكنك تكبَّدتَ عَناء تعلُّمها واستيعابها. هذا يحدُّ على الأقل من احتمال أن تكون الفكرة قد تراءت لآخَرين قبلك، وإن كان الاحتمال يظلُّ واردًا.

تتلقَّى أقسامُ الرياضيات حول العالم على الدوام رسائلَ من أناسٍ يدَّعون أنهم توصَّلوا إلى حلولِ مسائلَ مشهورة، وكل هذه «الحلول» تقريبًا تكون غيرَ صحيحة، وبدرجةٍ مُضحكة أيضًا. وبعضُها، وإن لم يكن خطأً تمامًا، فإنه لا يُشبه بُرهانًا صحيحًا

لأيِّ شيءٍ حتى إنها ليست بمحاولاتٍ للحل بأيِّ حال. وأولئك الذين يتَّبِعون على الأقل بعضَ المعايير المتَّفَق عليها في الطَّرح الرياضي يستخدمون حُججًا أوَّلية جدًّا حتى إنها — في حالِ كانوا على صواب — قد اكتُشِفَت منذ قرون. ولا يكون لدى الأشخاص الذين يكتبون هذه الرسائلَ أيُّ تصوُّر حول مدى صعوبةِ الأبحاث الرياضية، ولا حول الجهود اللازمة التي تستغرق سنواتٍ كاملةً لتكوين القدْر الكافي من المعرفة والخبرة لتقديم بحثٍ أصلي ذي معنًى، ولا حول إلى أيِّ مدًى تعتبر الرياضيات نشاطًا جماعيًّا.

لا أعني بهذه النقطة الأخيرة أن علماء الرياضيات يعملون في مجموعاتٍ كبيرة، مع أن كثيرًا من الأوراق البحثية يكون مُعِدُّوها اثنَين أو ثلاثة. ما أعنيه بالأحرى أنه مع تطور الرياضيات تُبتكَر أساليبُ جديدة وتصبح لا غِنى عنها للإجابة عن أنواعٍ مُعيَّنة من الأسئلة. ونتيجةً لذلك، فإن كل جيل من علماء الرياضيات يقِف على أكتافِ سابقيه، حيث يعمد إلى حلِّ مسائل كان يُنظر إليها من قبل على أنها مستحيلة. فإذا حاولتَ أن تعمل بمعزلٍ عن الاتجاه السائد في الرياضيات، فسوف يتعيَّن عليك إذن وضعُ هذه الأساليب بنفسك وهذا يضعُك أمام عقَبةٍ تعجيزية.

لا يعني هذا الجزمُ أنه لا يُوجَد شخصٌ غيرُ محترف يستطيع أن يُجرِيَ بحثًا ذا مغزًى في الرياضيات. والواقع أن هناك مثالًا أو اثنَين على ذلك. عام ١٩٧٥ اكتشفَت مارجوري رايس، وهي ربَّة منزل في مدينة سان دييجو على درايةٍ بسيطةٍ جدًّا بالرياضيات، ثلاثَ طُرق لم تكن معروفةً قبلًا لتقسيم المستوى بواسطة مُضلَّعات خُماسية (غير منتظمة)؛ وذلك بعد قراءة المسألة في مجلة «ساينتفيك أمريكان». وفي عام ١٩٥٢ أثبتَ كورت هيجنر، وهو مدرسٌ ألماني في الثامنة والخمسين من عمره، إحدى حَدْسيات جاوس الشهيرة، التي ظلَّت دون حسمٍ أكثرَ من قرن.

ومع ذلك، لا يتَناقض هذان المثالان مع ما قلتُه حتى الآن. تُوجَد بعض المسائل التي لا يبدو أنها وثيقةُ الصِّلة بالمحتوى الرئيسي للرياضيات، وهذه المسائلُ لا يُساعد في حلِّها كثيرًا معرفةُ الأساليب الرياضية الموجودة. وكانت مسألةُ إيجاد تقسيماتٍ جديدة على شكلِ مُضلَّعاتٍ خماسية كانت واحدةً من هذا النوع: لم يكن عالِمُ الرياضيات المحترفُ مؤهلًا بقدرٍ أفضلَ حالًا من غيرِ المحترف الموهوب لحلِّها. كان إنجاز رايس أشبهَ بإنجازِ عالِم الفلَك غير المحترف الذي يكتشف مُذنَّبًا جديدًا — الشهرة الناتجة هي جائزةٌ يستحقُّها عن جدارةٍ نظيرَ بحثٍ طويل. أما عن هيجنر، فعلى الرغم من أنه لم يكن عالمَ رياضياتٍ محترفًا، فإنه لم يعمل حتمًا بمعزلٍ تام. وتحديدًا، فقد درس بنفسه الدوالَّ المعيارية. ولا

يتَّسع المجال هنا لشرحِ المقصود بالدوالِّ المعيارية؛ إذ إنها عادةً ما تُعتبَر موضوعًا مُتقدمًا للغاية حتى بالنسبة إلى مُقررِ رياضياتٍ في مرحلة البكالوريوس.

من المثير للاهتمام أن هيجنر لم يكتب بُرهانه بطريقةٍ تقليدية تمامًا، وعلى الرغم من أن بحثه قد نُشِرَ على مضض، فقد كان يُعتقَد لسنواتٍ طويلة أنه غيرُ صحيح. وفي أواخر الستينيَّات من القرن العشرين، حلَّ المسألةَ مجددًا كلٌّ من آلان بيكر وهارولد شتارك على حِدَةٍ، وعندئذٍ فقط أُعيدَ النظر في بحث هيجنر بعناية، ووُجِدَ أنه صحيحٌ في نهاية المطاف. ولسوء الحظ، تُوفي هيجنر عام ١٩٦٥ ومن ثمَّ لم يُمهِلْه القدَر أن يعيشَ ليشهد الاعتراف بأهليته.

(٨) لماذا يصفُ علماء الرياضيات بعضَ النظريات والبراهين بأنها جميلة؟

لقد ناقشتُ هذا السؤال من قبلُ في الكتاب؛ ولذا سأتناوله بإيجازٍ شديدٍ هنا. قد يبدو من الغريب استخدامُ لغةٍ جمالية للإشارة إلى شيءٍ جامد في ظاهره مثل الرياضيات، لكن — كما شرحتُ (في نهاية مناقشة موضوع «تغطية شبكةٍ من المربعات بإزالة الأركان») — قد تُضفي البراهينُ الرياضية قدرًا من الاستمتاع، وثَمة أوجُه تشابهٍ كثيرةٌ بين هذا النوع من الاستمتاع والاستمتاع الجمالي بالمعنى المتعارَف عليه.

ولكن من أوجُه الاختلاف بينهما — على الأقل من وجهة النظر الجمالية — أن عالِم الرياضيات يكون مجهولًا بقدرٍ أكبر من الفنان. وعلى الرغم من أنَّنا قد نُعجَب كثيرًا بعالم الرياضيات الذي يكتشف برهانًا جميلًا، فالقصةُ الإنسانية وراء الاكتشاف تخبو مع الوقت، وفي النهاية، فإنَّ الرياضيات في ذاتِها هي ما يُسعدنا.

قراءاتٌ إضافية

تُوجَد جوانبُ مهمة في الرياضيات لم يتَّسع المجال لمناقشتها في هذا الكتاب. وفي هذا الصدد، يمكنني ترشيحُ بعض الكتب التي تناولتها. إذا أردتَ القراءة عن تاريخ الرياضيات، فمن الصعب أن تُفوِّت كتاب موريس كلاين، الذي تناولَ فيه هذا الموضوع في ثلاثة مُجلداتٍ فخمة، تحت عنوان *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (أكسفورد يونيفرستي بريس، ١٩٧٢). وهناك أيضًا كتاب *Innumeracy*، لمؤلِّفه جون ألين بولوس، (فايكينج، ١٩٨٩)، الذي سرعان ما أصبح من الكلاسيكيات المأثورة حول أهمية الإلمام بالرياضيَّات في تحسين قرارات المرء وأحكامِه في الحياة اليوميَّة. وفي كتابِ *The Pleasures of Counting* (كامبريدج يونيفرستي بريس، ١٩٩٦)، يذكر توم كورنر استخداماتٍ أكثرَ للرياضيات مقارنةً بما ذكَرتُه في كتابي هذا، بل وبمهارةٍ أكبر وذكاءٍ أعمق. ومن الكلاسيكيات الأخرى في الرياضيات كتابُ *What is Mathematics?* لمؤلِّفَيه كورنت وروبنز (أكسفورد يونيفرستي بريس، الطبعة الثانية، ١٩٩٦). هذا الكتاب يُشبه في مضمونه كتابي هذا، ولكنه أطولُ وأكثر اتِّسامًا بالطابَع الرسمي إلى حَدٍّ ما. يوجد كذلك كتاب *The Mathematical Experience* لمؤلِّفَيه ديفيز وهيرش (بيركهاوزر، ١٩٨٠)، وهو عبارة عن مجموعةٍ من المقالات المُمتعة المكتوبة بأسلوبٍ فلسفي عن الرياضيات ككلٍّ. كان بودِّي الإسهابُ في موضوع الاحتمال، ولكن يمكن بدلًا من ذلك الاطلاعُ على مناقشةٍ جميلة لموضوع العشوائية في الرياضيات وتداعياتها الفلسفيةِ في كتاب *Mathematics and the Unexpected* لمؤلِّفه إيفار إكلاند (يونيفرستي أوف شيكاغو بريس، ١٩٨٨).

الاستشهادات الواردة في المقدمة مُقتبَسةٌ من كتاب *Course in General Linguistics* لمؤلِّفه سوسور (ماكجروهيل، ١٩٥٦) وكتابِ *Philosophical Investigations* لمؤلِّفه فتجنشتاين (بلاكويل، الطبعة الثالثة، ٢٠٠١). سيُلاحظ مَنْ يقرأ كتابي هذا وكتاب

Philosophical Investigations مدى التأثير الذي مارسه فتجنشتاين في نظرتي الفلسفية؛ ولا سيَّما آرائي فيما يتعلق بالطريقة المجرَّدة. لا يُعدُّ كتاب *Principia Mathematica* الشهيرُ لمؤلِّفَيه راسل ووايتهيد (كامبريدج يونيفرستي بريس، الطبعة الثانية، ١٩٧٣) من الكتب السهلة في قراءتها واستيعابها، ولكن إذا وجدتَ بعضَ البراهين التي ضمَّنتُها في كتابي لبعض المبادئ الرياضية طويلةً ومسهبة، فيمكنك — على سبيل المقارنة — الاطلاعُ على برهان راسل ووايتهيد لإثبات أنَّ $2 = 1 + 1$. وأخيرًا، فيما يتعلق بموضوع المرأة في الرياضيات، الذي ناقشتُه في الفصل الثامن، فقد صدَر كتابان جيِّدان مؤخرًا؛ وهما: كتاب *Women in Mathematics: The Addition of Difference* لمؤلِّفته كلودينا هنريون (إنديانا يونيفرستي بريس، ١٩٩٧) وكتاب *Women Becoming Mathematicians: Creating a Professional Identity in Post-World War II America* لمؤلِّفته مارجريت موراي (إم آي تي بريس، ٢٠٠٠).

وأخيرًا، إذا كنت قد استمتعتَ بهذا الكتاب، فربما يروق لك أن تَعلم أنني عمَدتُ إلى الإيجاز قدْرَ الإمكان، وذلك بحذفِ أجزاءٍ كاملة من المسوَّدات الأولى، بما في ذلك حذفُ فصلٍ بأكمله. يمكن إيجادُ بعض هذه المادة في صفحتي الرئيسية على الإنترنت:

http://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10.


هنداوي